DE CIRCULI QUADRATURA.

DELLA QUADRATURA DEL CIRCOLO.

DE CIRCULI QUADRATURA
ET
DE CUBI DUPLICATIONE.
Cum ſimilium aliarum Rerum acceſſione.

DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ

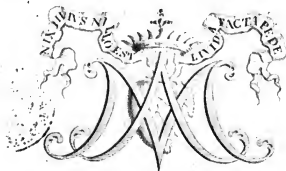
D. D. D.

MAIESTATI

SANCTISS.^{ME} REGINÆ

MATRIS VIRGINIS

AB PHILIPPO DE CARMAGNINIS

IN PHILOSOPHIA, ET MEDICINA DOCTORE.

FLORENTIÆ. MDCCLI.

EX TYPOGRAPHIA PETRI CAIETANI VIVIANI.

Superiorum Permiſſu.

DELLA QUADRATURA
DEL CIRCOLO
E
DEL DOPPIAMENTO DEL CUBO.
Con la giunta di altre ſimili Coſe.

DIMOSTRAZIONI GEOMETRICHE

D. D. D.

ALLA MAESTÀ

DELLA SS.MA REGINA
MADRE VERGINE

DA FILIPPO CARMAGNINI,
DOTTORE IN FILOSOFIA, E MEDICINA.

IN FIRENZE . MDCCLI.

NELLA STAMPERIA DI PIETRO GAETANO VIVIANI.

Con licenza de' Superiori.

SS. R. M. V.

Ecquid audacius me fingi unquam posse videbitur, qui quod a compluribus summis viris jam pluries frustra tentatum, ipse quoque ingenii viribus adeò dispar, non tentare modò, verum etiam chartis commendare, maximèque (id, quod maximum est) inclyto Majestatis tuæ Nomini dicare postea ausus sim? Nil equidem summo jure unusquisque arbitretur, nisi aliquam præseferret audacia mea excusationem, ne dixe-

SS. R. M. V.

CHI mai di me più ardimentoſo parrà, che ritrovare ſi poſſa, di me, che aſſai diſeguale, ed inferiore nella forza dell' ingegno a molti di ſublimiſſimo ſpirito dotati Perſonaggi, mi ſono tuttavia attentato di nuovamente ſperimentar ciò, che eſſi indarno tentarono: ma che diſſi io ſperimentare, anzi ſcrivere, e ciò, che è il maſſimo, dedicare poi al glorioſiſſimo Nome della M. V. le vergate carte? Che niuno per certo con

ſom-

dixerim, mereretur amplissimam. Nam si nullum dedecus illud esse existimandum est, ea in acie, in qua vel fortissimorum ceciderit robur virorum, etiam inter illos stipendia minimè facientem, si necesse fuerit, occumbere: sique non inglorium omnino eum esse hominem ducendum est, cui si non sat virium ad summa provolare, satis tamen animi esset in ea niti: hujusmodi enim saltem modo, quem potuit, *terra dedit fructum suum:* sique tandem vero verius illud sit; quod non debilis timidorum, sed *manus fortium dominabitur:* multis de nominibus audax animus meus ferendus erit; dum eo de nomine, quod quæ audacter perpetraverit, Majestati tuæ libentissimè obtulerit, non ferendus solum, sed multa etiam laude cumulandus mihi videtur. Quorsumnam enim inclinari optima voluntas deberet, nisi eò, ubi suam collocavit sapientia sedem, humanitati amplissimus est locus, auctoritati summam potestatem esse discernat? silentio facto & de ceteris præstantissimis meritis, & de illo, quo tenentur omnes erga de omnibus egregiè benemeritam grati animi officio; quo quis nam defungi nolit, si non ignoret, quod natum quoque tum cum Parente decoret?

Ps. LVI. 6.

Pro. XII. 24.

Præter-

ſomma ragione aſſerire ſi potrebbe : ſe per altro l' ardimento mio non foſſe degno di qualche ſcuſa , non voglio dire , la meritaſſe grandiſſima . Imperciocchè ſe ſtimar ſi deve , che in quello ſteſſo Campo , ove caduti ſiano i più forti Campioni , poſſa ancora , ſe così convenga , chi fra queſti non pugna , decoroſamente cadere , e ſe non reputaſi indegno di ogni laude colui , che ſe non ha baſtevoli le forze per ſalire al ſommo , ha però baſtevole il coraggio di far ver' quello ogni sforzo : perchè allor' , come così poteva , *terra dedit fructum ſuum* : e ſe finalmente ſia veriſſimo , che non la fievole mano de i timidi , ma che *manus fortium dominabitur* : è per molti capi ſoffribile del mio animo l' ardimento : mentre per quello , che è l' avere alla M. V. ciò , che eſſo oprò , volentieriſſimo conſagrato , non ſolo egli mi par ſoffribile , ma degno ancora di non picciola laude . Imperocchè è dove mai piegare meglio potrebbeſi una ottima volontade , ſe non colà , dove la Sapienza poſe ſua ſede , all' umanità vaſtiſſimo è il luogo , all' autorità una ſomma poteſtà eſſer diſcerne ? nulla dicendo delli altri ſingolariſſimi meriti , e di quell' univerſale dovere di gratitudine verſo

Sal. LVI. 6.

Pro. XII. 24.

Præterquamquod adverſo quidem flumine navis agenda foret, ſi etiam libellulum hunc (etſi haud equidem tali ſemet dignatur honore, tamen quâ quâ poſſit maximum, maximèque humile obſequium ſuum erga tuum immortale Nomen ſignificandi cupidiſſimum) quiſpiam ab eo tibi ſeſe repræſentandi conſilio avertere conaretur: idque eo magis, quia blandiatur ille ſibi, in quandam imbecillitatis meæ ſuſpicionem delapſus, quod exornatus, immò invicti Nominis tui auctoritate munitus, in lucem editus, non inſtar trepidulæ cervæ, quicquid increbruerit pavere, & leviſſimos quoſque ventorum ſuſurros perhorreſcere debebit.

Sed en jam M. T. quæ ſecum ipſe portat, niſi hujuſce rei hanc ſuam curam tua ſcientia præiverit. Portat (non dico extricat, ut ab omni illum arrogantiâ faceſſam) duos illos mathematicos intricatiſsimos nodos, quorum alter reductio eſt alicujus circuli ad æquale rectilineum, vel quadratum, & alter celebris illius Deliacæ aræ duplicatio: duo ambagibus referti labyrinthi in philoſo-

verso l'universale egregia Benefattrice: quale chi di adempir non desìa, se sà, che allora con la Madre anche il Figlio insieme onora?

Oltre che sarebbe certamente un navigare contr'acqua, se anche questo mio Libretto (benchè di un tale onore degno non stimasi, nulladimeno, comunque egli possa mai, bramosissimo di dimostrare quel grandissimo, umilissimo ossequio, che verso l'immortale Nome vostro nodrisce) tentasse uno dal pensiero di offrirsi tutto a Voi di distrarre: e ciò tanto più, perchè lusingasi egli medesimo, presa a sospetto la fiacchezza mia, che adornato, anzi guarnito dell'autorità del vostro potentissimo Nome, uscito alla luce, non potrà sempre, qual timidetta cerva, temere ogni muover di foglia, ed ogni leggier susurro di vento paventare.

Ma or'ecco alla M. V. ciò che esso seco porta, se prima, che egli il pensasse Voi non 'l sapevate. Porta egli (non dico sviluppa per discostarlo da ogni arroganza) quei due geometrici inviluppatissimi nodi, uno la riduzione di un circolo ad un'uguale rettilineo, o quadrato, l'altro il doppiamento di quel cubico altare della Città di Delo, due intricatissimi laberinti nell'Ocea-

losophiæ oceano, ex quibus, ni fallor, adhuc, ut pateret egressus, nullum sagax, callidumque filum repertum est. Spatiatur ille (ut paucis verbis tota res transigatur) semper inter circulos, spatiatur inter quadrata: figuras tantæ inter cæteras omnes figuras dignitatis, ut ab summo, sapientissimo rerum Opifice Deo O. M. cujus inclyta Filia, fœcunda Sponsa, digna Virgo Mater Tu es, formosissima quæque, ut ita dicam, inter ratione carentia opera admirabilia sua, alterutra illarum fuerint exornata: sic Terra, sic Luna, Sol, sic cætera rutilantia astra omnia, quæ Majestati Tuæ sese scamnum dant, amictum, & coronam, rotundâ figurâ, tanquam Symbolo immensæ æternitatis suæ ab illo decorata videntur: sicque tandem, præter complura alia, quæ de altera specie in medium proferri hic possent, id satis fuerit afferre, quod vel pulcherrima cœlestis illa Divina Civitas *in quadro posita* esse feratur.

Ap. XII. 1.

Ap. XXI. 16.

Sed jam nil ultra mihi superesse video, quam eo, quo possum, meliori modo ante pedes Majestatis Tuæ procumbens, ejusdem eximiam benignitatem, maximamque toto animi nisu exorare clementiam, ut, nusquam in mi-

no dello Scibile, per uscire da i quali non è stato peranche, se io non m' inganno, ritrovato qualche sagace, astuto filo. Và (per dir tutto in poco) spaziando sempre or fra i circoli, or fra i quadrati: figure di sì ragguardevole dignità fra tutte le altre, che dal sommo sapientissimo Facitore delle cose, IDDIO O. M. di cui Voi siete eccelsa Figlia, feconda Sposa, e degna Vergine Madre, le più belle, dirò così, fra le irragionevoli ammirabili opere sue, o dell' una, o dell' altra di loro siano state adornate: così la Terra, così la Luna, il Sole, così i rimanenti splendentissimi Astri tutti, che a Voi servono di scanno, manto, e corona, della rotonda figura, come simbolo dell' immensa eternità di lui, sono, vedesi stati abbelliti: e così finalmente passando sotto silenzio tutto ciò, che di più riportare quì si potrebbe intorno l'altra specie, basterà che solo io dica, che quella bellissima celeste Città di DIO dicesi posta in quadro.

Ap. XII. 1.

Ap. XXI. 16.

Ma nulla più ormai vedo restarmi, se non quello, che è, nel migliore modo, che io possa, posto a i piè della M. V. pregare con tutto lo spirito la singolarissima benignità, e clemenza della medesima, a volersi degnare di accettare questo attestato del mio divotissimo,

✠ 2 sem-

miserum, nec se benè dignum munus, sed in animi dumtaxat meam simplicitatem respiciens, hanc mei erga se addictissimi, sempiternique obsequii contestationem excipere, meumque, qualis qualis ille fuerit, qui suam jam jam sentit, fateturque tenuitatem, libellum, suum sub præsidium accipere, meque, qui quam qui maxime tibi, o Regina, toto animo subdor, & suum in præsidium accipere, & in eximiis tuis, quas maximè magnifacio, laudibus semper occupare non abnuat, dum ad illas corde, linguâ paratissimus, audeo humillimæ reverentiæ ergò, genu summittens, uti æternum velim, sic me nuncupare.

M. T.

Servus humillimus
PHILIPPUS DE CARMAGNINIS.

ſempiterno oſſequio verſo di eſſa, con riguardare non il miſero, e di lei non ben degno dono, ma ſolo il ſincero animo mio; e di ammettere qualunque e' ſiaſi, queſto, che tale già ſi confeſſa, tenue Libretto, ſotto il potentiſſimo ſuo Patrocinio, come me ſteſſo, che a Voi, o REGINA del tutto, con tutto l' animo mi ſoggetto, e ſotto il ſuo potentiſſimo Patrocinio, e al pregiatiſſimo onore delle egregie voſtre pregiatiſſime laudi, alle quali con il cuore, e con la lingua ſempre prontiſsimo, ardiſco in ſegno di umiliſsima riverenza, piegando il ginocchio, dirmi, come in eterno deſidero

Della M. V.

Il più umile Servo
FILIPPO CARMAGNINI.

PRÆFATIO.

Eluti inclytus ille Romanus Eques Marcus Curtius, uti, quæ pietas illius erat, omni metu ingruentis calamitatis mœstissimam Patriam liberaret suam, phalerato insidens equo in ingentem in Foro apertam voraginem se se præcipitem egit: sic ipse me, ut animi Patriam mei ab miseri illius Sulmonensis Vatis angoribus truces inter Scythas liberarem; in duplicem, quæ hiare mathematica amplissima in Provincia adhuc cernitur, geometricam voraginem audacter immisi. Itaque si mihi egregium illud Curtii decus, nobilisque nota, nullo modo accedat, nihilotamen minus audaciæ me meæ nulla unquam pœnitentia subibit: nam recreato animo, incolumique vita, sat suaves ex ipsa, uberesque fructus carpam: dum si parva hæc benigno etiam lumine quisque viderit, tum mihi meæ, quam Curtio, majus operæ pretium erit.

Sed omnibus quibuscumque missis, satius erit, me quid de ordine dicere, quo sequentes ad duo dicta problemata spectantes digessi demonstrationes: & quoniam quoad circulum,

PREFAZIONE.

Iccome quell' inclito Cavaliere Romano Marco Curzio, per liberare pietoso da ogni timore d' imminente calamità la mestissima sua Patria, sopra un abbigliato destriero nella spalancata nel Foro orrenda voragine intrepido precipitò, così ancor' io per liberare la Patria dell' animo mio dall' angustie del misero Poeta di Solmona fra quelli inumani Sciti, sono nella doppia voragine, che sempre aperta nella vastissima matematica provincia peranche rimirasi arditamente traboccato. Pertanto se a me non sia per venire di esso Curzio l' egregia laude, con tutto ciò non potrà mai essermi rincrescevole il mio ardimento: perchè ricreato l' animo, e conservata la vita; questo solo mi sarà sempre un soavissimo frutto del medesimo: mentre poi se queste mie tenui cose fossero non con maligno sguardo rimirate, sarebbe allora di quella di Curzio assai più vantaggiosa la sorte mia.

Ma lasciando ogni altra cosa da parte, gioverà che io passi a dire qualche cosa dell' ordine, che nelle seguenti dimostrazioni intorno a i detti due problemi sarò per tenere e

e per-

culum, triplici calle ad æquale rectilineum ejus reductionem pertentavi: ideò in tres diversas inter se se demonstrationes (quarta enim, uti videre licebit, eadem anterior tertia est, ob rei claritatem divulsa) partim desumptas ex convexa, partim ex concava parte illius, tota de eo res dispertita erit: inter ipsas demonstrationes minime recensitis paucis illis quarundam figurarum, quæ tanquam in itinere duces, etsi jam forte non obscuræ, præmittendæ tamen erant: nec non quibusdam aliis, quæ nescio, quo animi oestro tandem additæ sunt; dum problema Deliacum nil ultra habere quivit, quam brevissimam demonstrationem, omnium in calce repositam.

En hæc sunt, quæ ingenii mei tenuitas invenire potis fuit, aut ad explanandam, aut ad expediendam dictorum problematum solutionem. De ea, quæ ad philosophicas res delaberetur utilitas, præter rem esse puto, & verbum quidem facere, dum quilibet veritatis amator sat probè noverit, quale conjecturas inter, & demonstrationes intercedat discrimen: præter ipsum, qualecumque sit, utile gaudium, quo solet cujusque animus cumulari, juxta illud, omnia nova placent: *quando quid novi se se quoquo modo nobis percipiendum offert.*

Quod si forte quadam & ob rei difficultatem, & ob parvam, quia per me mihi comparatam supellectilem meam, & mihi id datum non esset (aut haud iniquis sapientum suffragiis, aut quia incolumi Pictore non laudari solet Pictura) uti Geometriæ, se non valuisse Herculeas istas transilire quasi columnas, conceptum ferè dolorem demerem: gaudebit nihilo tamen minus summopere animus meus, ita illi per me apparatam esse viam, ut sub alicujus Lynceos auspiciis verendum mihi minime sit, quin aliquando tandem prætergrediatur: sic quoque gutta cavat lapidem, non bis, sed

e perchè per quello, che il Circolo riguarda, per tre diverse vie la di lui riduzione ad un' uguale rettilineo ho tentata: perciò in tre differenti dimostrazioni (mentre, come potrà vedersi, la quarta è la medesima antecedente terza per maggiore chiarezza spartata) prese chi dalla di lui parte esteriore, e chi dall' interiore, sarà diviso tutto l' aggiramento intorno ad esso, senza noverare fra di esse dimostrazioni, quelle di alcune poche figure, che dovendo servire come di scorta nel cammino (sebbene già forse non incognite) si dovevano contuttociò necessariamente premettere: ed insieme alcune altre, che per un certo non saprei qual moto di animo sono finalmente state aggiunte, mentre il Deliaco problema non ha potuto avere, che una brevissima dimostrazione in ultimo luogo riposta.

Ecco quel poco, che ha saputo la debolezza del mio talento ritrovare, o per facilitare, o per ispedire la soluzione de i detti due problemi. Della utilità, che alle filosofiche cose ne ridonderebbe, stimo superfluo, che io ne parli: mentre chi amante è del vero, sa ben distinguere le congiettture dalle dimostrazioni, oltre una certa utile giocondità, che ciascuno sperimentar suole, secondo quel detto, ogni novella piace, *nel sentire cose nuove.*

Che se per sorte è per la difficoltà dell' opera, e per la poca supellettile mia, perchè da me a me provvista, non fosse dato a me ancora (o a maturo giudizio di color, che sanno, o perchè vivo il Pittor, non val Pittura) il togliere alla Geometria il concepito, per così dire, suo duolo di non aver potuto oltrepassare queste quasi d' Ercole colonne: nulladimeno sarà mio sommo godimento l' averle così agevolata la via, che con la scorta di qualche Linceo, non posso dubitare, che alla fine ella sia per oltre varcare: così anche la goccia il sasso incava, seppur vi cade spesso: *nè*

per

ſed ſæpè cadendo: *neque alio conſilio vernacula, & latina lingua hæc a me conſcripta ſunt.*

Interim, dum ut ſcias velim, cum nulla unquam editio ſuis careat erratis, ea, quæ rei claritatem macularent, emendata reperturum loco, ubi mos eſt; abecedariæ tabulæ ſolum minoribus literis, & numeris, quando majores ultra græcas aderant, ne me uſum mireris; non enim ſine aliqua cauſſa id fieret: ſed hoc ne magni quidem momenti eſt.

per alcuno altro fine è ſtato ciò in toſcana, e latina lingua da me ſcritto.

Frattanto non dovendo tralaſciare, che non rieſcendo alcuna edizione ſcevra de i ſuoi errori, quelli, che potrebbero intorbidare la chiarezza, ſi troveranno corretti al luogo ſolito: l' eſsermi io ſervito ſolamente dell' Alfabeta minore, e de i numeri, quando oltre il Greco, eravi il maggiore, non rechi meraviglia, perchè non ſenza qualche motivo è accaduto così. Ma ciò neppure è coſa di gran rilievo.

DELLA

DE CIRCULI QUADRATURA.

ALIQUOT FIGURÆ

Demonſtrationibus præmittendæ.

Fig. I.
Tab. I.

Irculo deſcripto, in dimidiâ illius parte dimidium quadrati, quod inſcribi in ipſo poteſt, deſcribatur, ſuperque duo latera ab: cb: qua parte centrum reſpiciunt, deſcribantur figuræ illis æquales, quas ipſa ab: cb: ſecant ab ipſo circulo, dico circulum, ſed quattuor æqualibus illis figuris carentem, æqualem eſſe quadrato inſcripto. Cum enim quatuor, æquales omnes, figuræ ſint exceſſus circuli ſupra quadratum in eodem inſcriptum, neceſse eſt, ut ipſe circulus quatuor ipſis orbatus figuris æqualis ſit quadrato inſcripto. Figura iſtius modi, ſcilicet circulus, quatuor cui deſint figuræ ex illis, quas ab ipſo latera inſcripti ſecant qua-

DELLA QUADRATURA
DEL CIRCOLO.

ALCUNE FIGURE

Che alle dimostrazioni conviene premettere.

I descriva un circolo, e nella di lui metà la metà del quadrato, che in esso può inscriversi, e sopra i due lati ab: cb: descrivansi verso il centro figure eguali a quelle, che essi dal circolo segano: dico, che il circolo, meno le quattro uguali figure, uguaglia il quadrato inscritto. Perchè essendo le quattro dette eguali figure quelle, nelle quali il circolo supererebbe il quadrato inscritto, ne seguirà, che esso meno le stesse quattro figure sia eguale al quadrato inscritto. Questa figura, cioè un circolo meno quattro figure di quelle, che segano da esso i lati dell' inscrittovi quadrato (detragghansi le figure da qualunque parte, mentre la

Fig. I. Tab. I.

A mu-

quadrati (undecunque tales figuræ tollantur, dum, uti videre eſt fig. 2. & 3. mutatio loci illarum non mutabit quantitatem) appellabitur quadratum ordinis primi, vel primæ ſpeciei.

Fig. 2.
Fig. 3.

Fig. 4.

Deſcribantur concentrici duo circuli alter alterius duplus, & in minore inſcribatur quadratum, & in altero ducantur duo latera ab: cd: quadrati quod quis poſſet inſcribere, quæ minorem circulum tangent, dico hujuſmodi figuram, dempto tamen circulo minore, nec non figuris ab majore circulo per latera ab: cd: ſuperius dicta ſectis, æquare quadratum in minori circulo inſcriptum. Cum enim ſit circulus alter minoris circuli duplus, ſi ab ipſo trahatur ipſe minor circulus, quodcunque relinquitur adæquabit ipſum minorem, non ſecus ac perpendicularis ef: adæquat radium fg: (Reliquiæ circuli majoris quandam ob ſimilitudinem dicentur rota majoris circuli, illius ſcilicet circuli, cujus illæ pars fuerint.) Cum igitur rota majoris circuli æqualis ſit circulo minori, cumque ſint duæ figuræ ab ipſa ſectæ per latera ab: cd: æquales quatuor ſimiliter ſectis a circulo minori per inſcripti quadrati latera, manifeſta res eſt, quod ſi quis ab rota dictas duas auferat figuras, veluti quatuor ſimiles ab circulo, ablata erunt æqualia, unde & relinquentur æqualia, atque adeo reliqua in rotâ æquantia reliqua in circulo æquabunt inſcriptum in ipſo quadratum. Figura hæc rota videlicet, quæ ex circulo alterius circuli ab ipſo detracti duplo relinquitur carens tamen duabus figuris ex iis deſcriptis ſupra latera quadrati inſcripti in eo circulo, cujus ipſa eſt pars, dicetur (quomodocunque demantur eæ figuræ) quadratum ordinis ſecundi.

Fig. 5.

Fig. 6.

Et quia plures ordinari poſſunt ſimul rotæ, ideoque tale quadratum multiplicari, deſcribantur duæ ro-

tæ

mutazione del luogo non farà loro mutare la quantità, come nella fig. 2: & 3:) la chiamerò un quadrato dell'ordine primo, o prima ſpecie. Fig. 2. Fig. 3.

Si deſcrivano concentrici due circoli in ragione fra di loro dupla, e nel minore di eſſi ſi inſcriva un quadrato, e nel maggiore ſi tirino due lati ab: cd: del quadrato, che potrebbe inſcrivervisi, che toccheranno il minor cerchio; dico, che queſta figura meno però il circolo minore, e meno le porzioni ſegate dal circolo maggiore da i detti due lati ab: cd: uguaglia il quadrato inſcritto nel minor cerchio. Imperocchè eſſendo il circolo più grande duplo dell'altro, ſe da eſſo ſi tolga l' altro, il rimanente ſarà eguale all'altro. (Il rimanente del circolo maggiore per la ſimilitudine lo chiamerò ruota del circolo maggiore, cioè di quel circolo, di cui egli è parte.) Eſſendo dunque la ruota del cerchio maggiore eguale al circolo minore, come la perpendicolare ef: uguaglia il raggio fg: , ed eſſendo le due figure ſegate da eſſa da i lati ab: cd: eguali a quattro ſegate dal circolo minore ſimilmente da i lati dell' inſcrittovi quadrato, è manifeſto, che togliendo dalla ruota le dette due figure, come dal circolo quattro ſimili, ſi va dalle eguali ſottrando coſe eguali, onde eſſendo le rimanenti eguali, ſarà per conſeguenza il rimanente della ruota eguale al quadrato inſcritto, perchè queſto è il rimanente del circolo. Queſta figura, cioè la ruota rimanente di un circolo doppio di un' altro, dopo detratto l' altro inſieme con due figure delle deſcritte ſopra i lati del quadrato inſcritto in eſſo circolo, di cui ella è parte, la chiamerò, comunque tolganſi le due figure, un quadrato dell' ordine ſecondo. Fig. 4. Fig. 5.

E perchè poſſono moltiplicarſi le ruote, e perciò tal quadrato, ſiano deſcritte due ruote in dupla ragione Fig. 6.

 ne

tæ altera alterius dupla (id quod fiet, si quis tres circulos continuâ proportione duplos describat) & in unaquaque ex ipsis perficiatur quadratum ordinis secundi: erunt duo ista quadrata ordinis secundi æqualia triplo quadrati in circulo minore a: inscripti eo, quia cum circulus a: sit is, qui æquat minorem rotam, unde subduplus etiam est alterius rotæ majoris, erit triens, seu pars tertia duarum, quæ simul sumuntur, rotarum. Figura ista, duæ scilicet rotæ in ratione duplâ: sed singula quæque carentes duabus ex illis figuris, quas ab ipsis secant latera quadrati in circulo inscripti, cujus ipsæ pars fuerint; sive solum rota major careat tribus ex iisdem dictis figuris, eò, quòd una rotæ majoris figura pro re datâ æquet duplum similis figuræ minoris rotæ, vocabitur quadratum ordinis tertii, seu tertiæ speciei.

Fig. 7. Fig. 8. Tab. II. Duas hasce figuras appellabo trilinea, alterum ex unâ, alterum duabus ex curvis (de circularibus semper dicens) uno verbo figuris, quæ imposito certo non gaudent nomine, nomen indam pro linearum quantitatu, tum eas vocitans quadrilineas, tum quinquelineas &c. prout rei claritas postulare videbitur.

COROLLARIUM,

COlligitur ex dictis, & præsertim ex figuris quartâ & sextâ, quod non solum æqualibus cum arcubus æqualium circulorum curvatis oppositis ad easdem partes, uti videre licet in tribus hisce figuris, quarum nona habens arcus ab: bc: rectamque ac: , suos terminos, æqualis est regulari triangulo abc: inscripto in eodem circulo, cujus peripheriæ sunt pars ejusdem arcus; decima duos pariter habens arcus, æqualis est quadrato ac:, undecima quatuor, alteri quadrato bd: sicuti

Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11.

ne fra di loro (il che ſeguirà deſcrivendoſi tre circoli in ragione continuamente dupla) e ſi compiſca in ciaſcuna di eſſe il quadrato dell'ordine ſecondo, ſaranno queſti due quadrati dell' ordine ſecondo eguali al triplo del quadrato inſcritto nel circolo minore a:, perchè a:, eſſendo il circolo uguale alla ruota minore, onde è ſudduplo della maggiore, ſarà la terza parte di amendue le dette ruote preſe inſieme. Queſta figura, dico due ruote in dupla ragione fra di loro, ma ciaſcuna preſa meno due figure di quelle, che da eſſa ſegano i lati del quadrato inſcritto nel circolo, di cui ella è parte, ovvero in tutte, preſe meno tre di tali figure, ſegate ſolo dalla ruota maggiore, perchè una figura della ruota maggiore eguaglia in queſto caſo il doppio della ſimile della ruota minore, la chiamerò un quadrato dell'ordine terzo, o terza ſpecie.

Queſte due figure le chiamerò trilinei uno di una, e uno di due curve, o archi, intendendo ſempre curve circolari, in ſomma a quelle figure, che non hanno un certo determinato nome, darò il nome ſecondo la quantità, e qualità delle linee, che ſaranno i di loro termini: dicendole or quadrilineo, or quinquelineo, ec. come richiederà la chiarezza maggiore.

Fig. 7. Fig. 8. Tab. II.

C O R O L L A R I O.

SI raccoglie dal ſopraddetto in ſpecie dalla figura quarta, e ſeſta, che non ſolo con eguali archi di circoli eguali, e li oppoſti piegati alla ſteſſa parte, come ſi può oſſervare in queſte tre figure, delle quali la nona, che ha li archi ab: bc:, ed una retta ac: per termini, eguaglia il triangolo regolare abc: inſcritto nel medeſimo circolo, della di cui periferia ſon parte i di lei archi : la decima pure di due archi eguaglia il quadrato ac: l'undecima di quattro, l'altro quadrato bd:,

Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11.

co-

ti palam eſt, eò, quòd nil aliud revera hæ figuræ ſint, quam ipſa eadem, quæ adæquant rectilinea, quibus quantum ex unâ detractum, non minus alterâ ex parte additum eſt: verum etiam inæqualibus cum arcubus inæqualium circulorum, dummodo oppoſiti ſint ad easdem curvati partes, conſtitui poſſunt curvilineæ, vel miſtilineæ figuræ æquales rectilineis. Quod cum ex tranſactis haud difficulter pateat, quamque inter ſe rationem oppoſiti arcus habere debeant facillime innoteſcat, nec majori indiget probatione, nec prætereundum erat.

PRIMA DEMONSTRATIO

Ex exteriori ſeu convexâ alicujus circuli parte deſumptâ.

Fig. 12. Tab. III.

DUcantur duæ rectæ ad: bc: horizonti parallelæ, interque ipſas, & ab ipſis tacti (id, quod ibi fiet, quo verticales circulorum diametri cadunt) duo deſcribantur circuli, qui inter ſeſe æquales exterius ſemet tangant, & in cavo illorum, manente eodem centro, alii deſcribantur duo, ſed ita, ut ſinguli quique tres ſint utrinque inter ſe continuâ proportione dupli. Ducantur deinde majorum circulorum horizontales diametri, quæ eadem erunt in lineâ, & diametri verticales, quæ, uti dictum, horizonti parallelas rectas ad: bc: conjungent: unde perfectum erit parallelogrammum abcd: Recta ef: ſecet id parallelogrammi bifariam, hæc, uti patet, per punctum contactus g: tranſibit, & idcircò verticalibus circulorum diametris erit parallela. Inſcribantur præterea utraque ex parte in majoribus circulis quadrata hi: kl: ſed ita ut illorum oppoſita latera, ea, quæ producta in punctis m: n: ſecantis e: f: ſimul concurrunt, ſint & ipſa horizontalia, & ad puncta i: l: o: p:, ubi quadrantem pe-

come è ben chiaro, perchè elleno non sono altro, che le istesse figure rettilinee, che esse eguagliano, alle quali quanto se le toglie da una parte, tanto se le aggiugne dall'altra: ma ancora con archi diseguali di circoli diseguali, purchè li opposti siano piegati alla istessa parte, si possono costituire figure curvilinee, o mistilinee uguali ad altre rettilinee. Ciò che per dedursi con facilità dalle antecedenti, come la ragione delli archi fra loro, non ho voluto passare sotto silenzio.

PRIMA DIMOSTRAZIONE

Presa dalla parte esteriore, o convessa di un circolo.

Si tirino due rette ad: bc: parallele all'orizonte, e fra di esse, e toccati da esse (ciò, che sarà, ove caderanno i diametri verticali de i circoli) si descrivano due cerchi, che essendo uguali si tocchino per di fuori, e nel concavo di essi con il medesimo centro de i primi, se ne descrivano altri due, così, che ogni tre da ciascheduna parte siano fra loro in ragione continuamente dupla. Si tirino poi de i circoli maggiori i diametri orizontali, che saranno per diritto, ed i verticali, che come dissi, congiugneranno le parallele ad: bc:, onde sarà compito un parallelogrammo abcd: seghi la retta ef: questo parallelogrammo per il mezzo, passerà per il punto del contatto g: e sarà perciò a i verticali diametri de i circoli parallela. Si inscrivano da ambedue le parti nei circoli maggiori i quadrati hi: kl: in modo però, che i di loro lati opposti, che prodotti concorrono insieme ne i punti m: n: della segante ef: siano essi pure orizontali, ed a i punti i: l: o: p:, nei quali segano la quarta parte della periferia del

Fig. 12. Tab. III.

periphæriæ ſui circuli ſecant bifariam, ab punctis e: & altero adverſo f: ductæ ſunto rectæ eo: ep: fi: fl: & ex iisdem punctis il: op: decidant ad rectam fe: adeò ut reliquas qg: rg: adæquent ſingulæ quæque, rectæ lineæ or: pr: iq: lq:, & tandem ex punctis, in quibus ſecant rectam ef: poſtremæ hæ rectæ ducantur ad circulorum perimetros aliæ rectæ, ex quibus quælibet bifariam arcum illum dividat, qui duas inter rectas poſitus octava pars erit perimetri ſui circuli.

Jam hoc peracto ob oculos verſatur parallelogrammum hstk: ex octo compoſitum æqualibus quadratis, ex quibus quodlibet quadrans, vel quarta pars eſt unius ex inſcriptis majoribus in circulis quadratis, inſuper & ex parallelogrammo oilp: inter ipſa medio quadrata: vel alio modo, compoſitum duobus ex æqualibus quadratis ordinis, quem dixi tertium, ad hoc, duobus ex circulis v: & z:, quos cingunt eadem quadrata, & duobus ex trilineis duabus quodlibet ex curvis, ſcilicet ex trilineo opg: & igl: adverſo, & æquali, adeò, ut permanente utroque modo eodem ſpatio, prima illius compoſitio alteram adæquet, qualitate licet figurarum diverſam.

Qua de re ſi a parallelogrammo hstk: velit quiſpiam cum primæ, tum ſecundæ æqualis compoſitionis illius, æquales detrahere partes, procul dubio id, quod unamquamque poſt demptionem utrobique relinquitur, æquale erit inter ſe.

Itaque cum in præmiſſis figuris demonſtratum fuerit, quadratum ordinis tertii æquare triplum quadrati inſcripti in circulo, minori rotæ, æquali, qui circulus erit in præſens circulus v: vel z: erunt ergo duo æqualia ordinis tertii quadrata æqualia ſextuplo quadrati inſcripti in v: vel z: at ſex ex inſcriptis quadratis

in

del ſuo circolo per mezzo, ſiano da i punti e:, e l' oppoſto f: condotte le rette eo: ep: fi: fl: e dai medeſimi i: l: o: p: cadano alla retta ef: in modo che ciaſcheduna uguagli la rimanente qg: rg: le rette or: pr: iq: lq:, e finalmente dai punti, nei quali ſegano la retta ef: queſte ultime rette ſi conducano alle periferie dei circoli altre rette, delle quali ciaſcuna ſeghi per il mezzo quell' arco, che poſto fra due rette ſarà l' ottava parte dell' intiero perimetro del ſuo circolo.

Or ciò fatto vedeſi un parallelogrammo hstk: compoſto di otto eguali quadrati, dei quali ciaſcuno è la quarta parte di uno degli inſcritti quadrati nei circoli maggiori, e più del parallelogrammo oilp: poſto in mezzo delli ſteſſi quadrati: ovvero altrimenti, compoſto di due uguali quadrati dell' ordine terzo, più, di due circoli v: z: d' intorno ai quali ſtanno detti quadrati, e più, di due trilinei di due curve, cioè del trilineo opg: ed igl: eguali fra di loro; di maniera, che eſſendo ſempre lo ſteſſo ſpazio, ſia il primo detto di lui componimento uguale al ſecondo, benchè differente nella qualità delle figure.

Per la qual coſa ſe dal parallelogrammo hstk: ſi voleſſe sì della prima, che della ſeconda di lui uguale compoſizione eguali parti ſottrare, ſarà coſa certa, che il rimanente dopo ciaſcuna detrazione uguaglierà ſempre il rimanente diverſamente figurato.

Eſſendoſi pertanto dimoſtrato nelle premeſſe figure, che un quadrato dell' ordine terzo uguaglia il triplo del quadrato inſcritto nel circolo eguale alla ruota minore, qual circolo ſarà preſentemente il circolo v: o z: ſaranno dunque i due eguali quadrati dell' ordine terzo uguali al ſeſtuplo del quadrato inſcritto in v: o z: ma

B ſei

in v: vel z: ſunt ſex quartæ partes unius in circulis majoribus ex inſcriptis quadratis, ſcilicet hi: vel kl: ergo duo æqualia ordinis tertii quadrata ſex æquant quartas partes quadrati hi: vel kl: unde æqualia erunt ſimul ſumptis quadratis ov: hv: sv:, & alterâ ex parte pz: kz: tz: quorum quodvis quarta pars eſt inſcripti hi: vel kl: veluti bene patet.

Demantur igitur a parallelogrammo hsek: primum ſuperius dicta ſex quadrata, quæ ſunt figuræ rectilineæ primæ illius compoſitionis, & deinde duo æqualia ordinis tertii quadrata, quæ miſtilineæ figuræ ſunt ſecundæ: manifeſtum ex dictis eſt, quod quia utroque modo æqualia tolluntur, reliqua etiam æqualia erunt inter ſe: ſed demptis ſex quadratis nil ſupereſt ultra parallelogrammum oilp: una cum duobus æqualibus quadratis vi: zl: demptiſque duobus ordinis tertii quadratis, relinquuntur duntaxat duo circuli v: & z: una cum duobus trilineis ogp: igl: ergo reliqua duo æqualia quadrata vi: zl: unacum parallelogrammo oilp: æquabunt reliquos duos circulos v: z: unacum duobus æqualibus ogp: igl: trilineis.

COROLLARIUM.

Si cum circulis v: & z: unacum trilineis ogp: igl:, tum duobus quadratis vi: zl: una cum parallelogrammo oilp:, ſpatiis inter ſe ſe æqualibus, æqualia adderentur, duo ſcilicet inter ſe ſe æqualia triangula oep: & oppoſitum ifl:, jam ſe ſemper æquarent, ſed circulorum una cum trilineis, & ſuperius dictis triangulis obire poſſent tunc vices etiam duæ rotæ minores, ſumptæ una cum quadruplo trilinei 2ox: una ex curva, & ſupra majorem alicujus ex ipſis rotis periphæriam deſcripti. Namque 2ox: dimidia pars eſt trilinei ſimilis aeg: ſu-

sei quadrati degli inscritti in v: o z: sono sei quarte parti di un quadrato degli inscritti nei circoli maggiori, dico di hi: ovvero kl: dunque i due eguali quadrati della specie terza eguagliano sei quarte parti del quadrato hi: ovvero kl: onde saranno eguali ai quadrati insieme presi ov: hv: sv: e dall' altra parte pz: kz: tz: ciascuno dei quali è la quarta parte dell' inscritto hi: oppure kl: come è manifesto.

Si sottrino dunque dal parallelogrammo hstk: prima i sopraddetti sei quadrati, figure rettilinee della prima di lui composizione, e dipoi i due eguali quadrati dell'ordine terzo, figure mistilinee della seconda, è manifesto per li antecedenti, che togliendosi nell' uno, e nell'altro modo eguali cose, ancora le rimanenti saranno fra di loro uguali: ma difalcati i sei quadrati, nulla vi resta più, che il parallelogrammo oilp: insieme con i due eguali quadrati vi: zl:, e detratti i due quadrati della terza specie vi restano solo i due circoli v: e z: più i due trilinei ogp: igl: dunque i due rimanenti eguali quadrati v i: zl: insieme con il parallelogrammo oilp: eguaglieranno i due rimanenti circoli vz: più i due eguali trilinei ogp: ed igl:

C O R O L L A R I O.

SE ed ai circoli v: e z: insieme con i trilinei ogp: igl: ed ai quadrati vi: zl: insieme con il parallelogrammo oilp:, spazi uguali fra loro, si aggiungessero uguali cose, cioè i due fra loro uguali triangoli oep: , e l' opposto ifl: sarebbero sempre fra di loro uguali, ma in luogo dei circoli insieme con i trilinei, più i detti triangoli, starebbero allora anche le due ruote minori, prese però insieme con il quadruplo del trilineo 2ox: di una curva, descritto sopra la periferia maggiore di una di esse ruote. Imperocchè 2ox: è la metà del semi-

supra rotam majorem ex eadem parte descripti, juxta rationem circulorum, & aeg: æquale est unicuique ex supra dictis trilineis ogp: igl: una cum uno ex triangulis, ut patet; quâ de re cum quadruplum 2ox: æquale sit duplo aeg: æquabit duo trilinea ogp: igl: additis ipsis duobus triangulis: cumque rotæ æquales sint circulis v: z: deducetur hinc, quod figura, quæ quasi conspicilla suis orbata vitris repræsentat, æqualis sit duobus quadratis iv: lz: insuper & parallelogrammo oilp: additis duobus triangulis oep: ifl: non secus, ac propositum fuit.

Fig. 13.

Fig. 14. Tab. IV.

Ductâ nunc horizonti parallela recta ay:, describantur concentrici duo semicirculi, alter alterius quadruplus, superque eorum dimidiatas perimetros, iis sumptis, qui sunt ex eadem parte, describatur similiter trilineum ex cujus rectis quælibet sit dimidium lateris quadrati, quod perfecto circulo circumscribi potest, &, his peractis, in verticalibus ipsorum trilineorum dimidiis partibus id omne similiter fiat, quod in simili cujuscumque ex trilineis supra majores rotas (in antecedenti fig. 12.) descriptis parte factum fuit: apertum est (si in ipsâ 12: trilineum ged: sumatur) quod veluti tum recta rp: æqualis fuit tangenti rg:, sive qg:, ita nunc recta ed: æqualis erit tangenti ea:, & recta 23: rectæ 2a:, & quod sicuti recta pm: productio lateris horizontalis quadrati kl:, & secans bifariam arcum trilinei ged: perpendicularis fuit ipsius verticali lateri eg:, sic similiter recta di: lateri ba:, & recta 3h: lateri na:, & quod ut recta pe: trilineum ipsum est bipartita, ita rectæ bd: n3:, & quod non secus, ac recta r3:, quæ bifariam mediam trilinei arcus partem dissecuit, ita rectæ ek:, eq: bifariam medias partes arcuum descriptorum trilineorum partientur. Quibus mediis partibus subtensis deinde rectis ad: do: a3: 3v: parallelæ ex punctis e: & f:, ducantur uni rectæ id: rectæ eg:, fh:, quæ

fh:,

mile trilineo aeg: descritto dalla stessa parte sopra la ruota maggiore secondo la ragione dei circoli, ed aeg: uguaglia ciascuno de i trilinei sopraddetti ogp: igl: con la giunta di uno de i triangoli, come si vede: onde il quadruplo di 2ox: eguagliando il duplo di aeg: sarà eguale ai due trilinei ogp: igl: con la giunta dei due triangoli: e le ruote eguagliando i circoli v: z: se ne dedurrà, che la figura, che si fa simile ai vetri da occhio, ovvero occhiali, mancanti del vetro, uguaglia i due quadrati iv: lz: più il parallelogrammo oilp: con la giunta dei due triangoli oep: ifl: come appunto si disse. Fig. 13

Or tirata una retta ay: orizontale, si descrivano con centro comune due semicircoli in ragione fra loro quadrupla, e sopra le metà de i loro perimetri, prese quelle dalla istessa parte, descrivasi similmente un trilineo, le di cui rette siano ciascheduna la metà del lato del quadrato, che si circonscriverebbe al compito circolo, e ciò fatto, segua nelle verticali metà di essi trilinei tutto ciò, che nella simile metà di ciascuno dei similmente descritti sulle ruote maggiori (nella antecedente fig. 12:) fu fatto; è manifesto (prendendosi in (essa 12:) il trilineo ged:) che come allora fu la retta rp: eguale alla tangente rg:, oppure qg:, così adesso la ed: sarà eguale alla tangente ea:, e la 23: alla 2a:, e che come la retta pm: produzione del lato orizontale del quadrato kl: e segante per mezzo l' arco del trilineo ged: fu perpendicolare al verticale lato eg: di esso, così similmente la di: ad un lato ba: e la 3h. ad un lato na: e che come la pe: divise esso trilineo per il mezzo, così le bd:, n3:, e che come la r3: segò in parti eguali la metà dell' arco di esso, così le ek: 2q: segheranno per mezzo le metà delli archi dei descritti trilinei. Alle quali metà dipoi le rette ad: do: a3: 3v: sottendendo, parallele alla id: dai punti e: f: si tirino le eg:, fh:, quale fh:, non essendo parallela alle 3h: e toccandola le fa- Fig. 14. Tab. IV.

rà

fh:, nisi rectæ 3h: sit parallela, dum eam tangit esse debet in eadem lineâ; & productis rectis ek:, bd:, linea 3g: parallela sit lineæ ef:

Cum igitur similia trilinea sint inter se in eadem, ac semicirculi inter se, ratione, erit majus alterius quadruplum (nec aliter est in fig. 12: simile trilineum ged: superius dictum, quoad trilineum abc:, descriptum similiter supra circuli z: periphæriam) ideoque erit illius quarta pars æqualis trilineo minori.

Assero nunc mistum segmentum, quadrilineum videlicet iekd:, quartam partem esse majoris trilinei, æqualem alteri trilineo anv: Cum sit enim angulus dbo: in vertice b: angulus semirectus, eò, quòd una est ex partibus anguli recti ibc:, quas fecit recta bd:, quæ trilineum bifariam dissecuit, erit propter parallelas id:, bc:, æqualis alterno angulo bdi:, quâ de re etiam angulus bdi: semirectus erit: atqui totus bde: angulus rectus est, eò, quia recta bd: perpendicularis est rectæ de:, quoniam cum de: æqualis sit tangenti ea:, & ideò ipsa quoque semicirculum tangat, & tangat in puncto d:, quia etiam recta ek: bifariam secans arcum inter ipsas de:, ea:, producta pergit ad centrum x:, est versâ vice perpendicularis rectæ bd:, eò, quòd bd: pergit ipsa quoque ad centrum x:; ergo reliquus angulus ide: quoque semirectus est. Unde cum in unoquoque ex duobus triangulis ibd:, ied: circa unum commune latus id: sint duo alter alteri æquales anguli, eo, quòd cæteri anguli eid:, bid:, positi jam recti fuerint, erit triangulum ibd: æquale triangulo eid: Sed etiam trilineum ekd: æquat trilineum eak:, quoniam utrumcunque totius trilinei aed: dimidia pars est, facta per rectam ek:, ergo nil ultra remanens in majoris trilinei mediâ parte, si duo æqualia triangula una cum duobus æqualibus trilineis componunt totum ipsius majoris trilinei dimidium, unum

trian-

rà per diritto; e prolungate le ek:, bd:, la 3g: sia parallela alla ef:

Essendo pertanto i simili trilinei fra loro nella ragione de i semicircoli tra loro, sarà il maggiore quadruplo dell'altro (come appunto nella fig: 12: è il trilineo simile ged: sopra detto del trilineo abc: similmente descritto su la periferia del circolo z:) e perciò sarà la quarta parte di lui eguale all'altro.

Dico adesso, che il segmento misto, oppure il quadrilineo iekd:, è la quarta parte del maggior trilineo, ed è eguale all'altro trilineo anv: Imperocchè essendo l'angolo dbo: al vertice b: un angolo semiretto, perchè è una delle parti dell'angolo retto ibo:, fatte dalla bd:, che divise il trilineo per il mezzo, sarà per le parallele id:, bc:, eguale all'alterno bdi: onde ancora bdi: sarà semiretto: ma tutto bde: è un angolo retto, perchè la bd: è perpendicolare alla de: perchè essendo la de: uguale alla tangente ea:, e perciò essa pure toccando il semicircolo, e toccandolo in d: perchè ancora la ek: va prodotta al centro x:, è viceversa perpendicolare alla bd:, perchè bd: va essa ancora al centro x:; dunque il rimanente angolo ide: eziandio è semiretto. Sicchè essendo in ciascuno de i due triangoli ibd:, ied:, intorno ad un comune lato id:, eguali due angoli uno all'altro, perchè li altri angoli eid:, bid:, furono retti per la costruzione, sarà il triangolo ibd: eguale al triangolo eid: Ma ancora il trilineo ekd: eguaglia il trilineo eak:, perchè ciascuno è la metà del trilineo aed:, fatta dalla ek:, dunque non rimanendo altro nella metà del trilineo maggiore, se due triangoli eguali con due uguali trilinei sono tutta la metà di esso, un triangolo con un trilineo de i detti, ovvero il quadrilineo iekd: sarà la quarta parte di esso, ed uguaglierà conseguentemente il trilineo anv:, come si volea. Ma

triangulum una cum uno trilineorum, quadrilineum scilicet iekd: erit ipsius trilinei quarta pars, atque adeo adæquabit trilineum anv: penes minorem semicirculum descriptum, sicuti assertum est.

Sed si veluti quadrilineum iekd: æquat trilineum anv:, etiam semifigura kfd: illi subjecta æqualis sit duabus figuris, quæ mediis partibus totius arcus trilinei anv: subjiciuntur (prout cadit, quia duplum ipsius fkd: ob figurarum similitudinem, & semicirculorum inter se rationem, æquale est duplo ipsarum duarum figurarum) necesse erit, ut quadrilineum iekd: una cum semifigurâ kfd:, videlicet quadrilaterum iefd: æquale sit trilineo anv: una cum subiectis duabus inter semet æqualibus figuris; vel, dixeris idem, æquale sit duobus simul inter se æqualibus triangulis an3: vn3:

Rebus ita comparatis, affirmarim nunc portionem quadrilateri iefd:, idest triangulum edf:, æqualem esse portioni duorum triangulorum, an3:, vn3:, quæ est triangulum ag3: Cum enim triangulum edf: æquale sit triangulo eaf:, eò, quòd utrumque dimidium sit ejusdem trianguli aed:, factum ab rectâ ek: productâ, eumque eaf: æquale sit tr angulo ag3:, quia eaf:, & ag3: sunt duo triangula, quæ dum habent unum angulum eaf: ob figurarum similitudinem æqualem uni angulo ga3:, & contentum ab æqualibus lateribus, eò, quod cum homologa inter se sint parallela, conjunguntur etiam utrinque ab inter se parallelis rectis eg: aa: f3: aa:, unde & sunt æqualia; invicem semet debent adæquare, erit etiam triangulum edf: æquale triangulo ag3:

Igitur si edf: æquale est ag3: (cum æqualia, quibus æqualia desint, sint semper æqualia) etiam reliquiæ quadrilateri iefd: æquales erunt reliquiis duorum trian-

gu-

Ma ſe come il quadrilineo iekd: uguaglia il trilineo anv:, ancora la ſemifigura kfd:, che gli è ſottopoſta, eguagli le due figure inſieme, ſottopoſte alle metà dell' arco del trilineo anv: (come appunto ſegue, mentre il duplo di fkd: per la ſimilitudine delle figure, e ſecondo la ragione de i ſemicircoli fra loro eguaglia il doppio di eſſe due figure) farà duopo, che il quadrilineo iekd: più la ſemifigura kfd:, cioè il quadrilatero iefd:, eguagli il trilineo anv: più le ſottopoſte due eguali figure, che è quanto dire, uguagli i due tra loro eguali triangoli an3:, vn3:

E ciò eſſendo, dico adeſſo, che la parte del quadrilatero iefd:, cioè il triangolo edf: eguaglia quella parte dei due triangoli an3:, vn3:, che è il triangolo ag3: Imperocchè eſſendo il triangolo edf: eguale al triangolo eaf:, perchè ſono ambi le eguali metà dell' intiero aed:, fatte dalla ek: prolungata, ed eſſendo eaf: eguale ad ag3:, perchè i triangoli eaf:, ed ag3: per eſſere due triangoli, che avendo un angolo eaf: per la ſimilitudine delle figure eguale ad un angolo ga3:, e contenuto da eguali lati uno all'altro per queſto, perchè eſſendo paralleli li omologhi fra loro, ſono inoltre congiunti dalle parti dalle fra loro parallele, le rette eg. aa: f3: aa:, onde ancor ſi eguagliano, devono eſſere eguali: ſarà eziandio il triangolo edf: eguale al triangolo ag3:

Or ſe edf: uguaglia ag3: (mentre li eguali, che mancano di coſe eguali ſon ſempre eguali) anche il rimanente del quadrilatero iefd: eguaglierà il rimanente

gulorum: Scilicet triangulum e i d: æquale erit quadrilatero s v n g:

Sic etiam trilineum a n v: & quadrilineum i e k d: inter sese æqualia, si ambobus eadem deficeret portio, se invicem, ut antea, coæquarent. Sed (si hoc fieri potest) dividat ab trilineo a n v: aliqua recta, ducta a puncto 3: in medio arcu ipsius trilinei posito, & quæ verticale latus ejus n a: secet, portionem trilinei incipientem ab extremo puncto a: & æqualem trilineo e k d: parti quadrilinei i e k d:

Ut hoc datâ fiat conditione, dico satis esse, rectæ 2 3: lateri parvi trilinei a 2 3: versus n: addere triangulum, cujus ipsa 2 3: , & altera linea ducta ab eodem puncto 3:, ita, ut secet verticale trilinei latus n a:, sint latera duo, & triangulum æquale sit ipsi trilineo a 2 3: Cum enim trilinea a 2 3:, & aed: similiter descripta fuerint, unde si a e d: est quadruplum a 2 3: juxta semicirculorum inter se rationem, illius dimidium e k d: duplum erit a 2 3:, dato, quod addatur trilineo a 2 3: eo, quo dictum modo, spatium æquale ipsi a 2 3:, manifestum est, fore tunc temporis in additamenti hujusce fine, initio ab extremitate a: sumpto, sectam ab trilineo a n v: portionem æqualem trilineo e k d:, uti quærebatur.

Sed quia si etiam superius dicto quadrilatero 3 v n g:, triangulorum reliquæ portioni per rectam 3 g: factæ, adderetur simili modo, a: versus, triangulum æquale figuræ 3 l v:, quæ ejusdem quadrilateri quædam pars est, & ipsa figura 3 l v: auferretur (quoniam mutatione figuræ non mutaretur ipsius quadrilateri quantitas, eò, quòd ablato una ex parte quantum illi additur ex alte-

dei due triangoli, cioè il triangolo eid: eguaglierà il quadrilatero 3vng:

Così ancora se il trilineo anv:, ed il quadrilineo iekd: eguali fra loro, mancassero ambedue di una porzione eguale, il rimanente di uno sarebbe uguale al rimanente dell'altro. Ma (se si può) si seghi dal trilineo anv: con una retta condotta dal punto 3:, posto nella metà dell' arco di esso trilineo, e che seghi il verticale di lui lato na: una porzione di esso, che cominciando dal punto estremo a: eguagli il trilineo ekd: parti del quadrilineo iekd:

Per segare nel dato modo dal trilineo anv: una porzione eguale al trilineo ekd:, dico, che basta alla retta 23: lato del piccolo trilineo a23: verso n: aggiugnere un triangolo, di cui la stessa 23:, ed un'altra condotta dall' istesso punto 3: a segare il lato verticale na: del trilineo, siano due lati, essendo per altro il triangolo eguale ad esso trilineo a23: Perchè per essere stati i trilinei a23:, ed aed: similmente descritti, essendo aed: quadruplo di a23:, secondo la ragione dei semicircoli fra loro, e però la di lui metà ekd: dupla di a23:, se si aggiugnerà al trilineo a23: nel detto modo uno spazio eguale ad esso a23:, è manifesto, che sarà allora nel termine di questa giunta, cominciando dalla estremità a:, segata dal trilineo anv: la porzione eguale al trilineo ekd:, come si desiderava.

Ma perchè se ancora al sopraddetto quadrilatero 3vng: porzione rimanente dei triangoli, segata dalla 3g: si aggiugnesse verso a: in simile maniera un triangolo eguale alla figura 3lv:, parte di esso quadrilatero, e si togliesse essa figura 3lv: (giacchè mutandosi la figura non si muterebbe la quantità di esso quadrilatero, perchè togliendosegli da una parte ciò, che se gli aggiu-

terâ, semper erit æquale triangulo i e d:, uti superius demonstratum fuit) reliquum trilinei a n v: non solum esset portio æqualis trilineo e k d:, cum totum a n v: fuerit æquale quadrilineo i e k d:, verum etiam portio foret dato modo secta; potius quàm addere primo modo rectæ lineæ 2 3: spatium æquale trilineo a 2 3:, addatur rectæ 3 g:, simili ratione, triangulum, quod si tamen hoc liceat) æquale sit dictæ figuræ 3 l v:, inde postea auferendæ.

Fingamus igitur animis, quod extremitate sua g: secando semper verticale latus n a:, nec unquam recedendo a puncto 3:, inhærente medio trilinei arcui, recta 3 g: moveatur semper a: versus, & descripto primum in figurâ 3 l v: isoscelio triangulo, ejusmodi primus illius motus sit, ut progrediatur versus a: quantum est hoc triangulum (quod ut cætera, quæ sequentur, altitudini 3 h: aptatum putes) mobilis recta 3 g: exempli caussa a puncto g: ad punctum m: perveniet extremitate sua g:

Subtendatur nunc octavæ peripheriæ semicirculi majoris parti, idest parti n o:, recta ejusdem nominis n o:, erit dimidium figuræ n o: æquale duabus inter se æqualibus figuris, quæ relictæ sunt in figurâ 3 l v:, ablato jam triangulo æquante triangulo g 3 m:, eo, quod tota figura n o: ob similitudinem, juxta semicirculorum inter se rationem, ipsarum duplum esse constat duarum. Describatur igitur in dimidio figuræ n o: triangulum n p r:, mobilisque recta 3 g: percurrat iterum versus a: spatium æquale isti quoque triangulo, a lineâ 3 m: pertinget mobilis 3 g: ad rectam 3 x:, latus trianguli n p r: aptati altitudini 3 h:, ad rei claritatem in x: productum.

Et

giugne da un'altra, sarà sempre eguale al triangolo i e d:, come sopra fu dimostrato) sarebbe il rimanente del trilineo a n v: la porzione non solo eguale al trilineo e k d:, perchè tutto a n v: fu eguale al quadrilineo i e k d:, ma ancora la segata nel dato modo: in vece di aggiugnere nella prima maniera alla retta 2 3: lo spazio eguale al trilineo a 2 3:, si aggiunga alla retta 3 g: in simile guisa il triangolo, che uguagli (se pure ciò si può) la sopra detta figura 3 l v:, che togliere si deve dopo l'aggiunta.

Si supponga pertanto, che con la sua estremità g:, segando sempre il lato verticale n a: la retta 3 g:, ma fissa nel punto 3:, posto nella metà dell' arco del trilineo, muovasi, ma sempre verso a:, e descritto primieramente nella figura 3 l v: un' isoscele triangolo, sia tale il di lei primo movimento, che passi alla volta di a: uno spazio eguale a questo triangolo (quale si supponga come i seguenti, adattato all'altezza 3 h:) la mobile 3 g: per esempio giugnerà dal punto g: al punto m: con la sua detta estremità g:

Si sottenda adesso alla ottava parte della periferia del semicircolo maggiore, che sarà la parte n o:, una retta n o:, sarà la metà della figura n o: eguale alle due tra loro eguali figure rimanenti nella figura 3 l v:, detrattone già il triangolo eguale al triangolo g 3 m: perchè tutta n o: per la similitudine delle figure sarà il duplo di esse due, attesa la ragione dei semicircoli fra loro. Si descriva pertanto nella metà di n o: un triangolo n p r:, e la mobile 3 g: si inoltri verso a: nuovamente uno spazio eguale ancora a questo triangolo, la mobile dalla retta 3 m: giugnerà fino alla retta 3 x:, lato del triangolo adattato all' altezza 3 h: prodotto in x: per chiarezza maggiore.

E per-

Et quoniam in dimidio figuræ n o:, ablato triangulo n p r:, satis adhuc apparens spatium relinqui debet, cujuscumque sit semicirculus magnitudinis, describatur etjam in hoc spatio (fas enim est) isoscelium triangulum (latera ipsius ipsis cum arcubus convenire videbuntur) & quantum est ejusmodi triangulum, nil minus versus punctum a: mobilis recta 3 g: decurrat, ab rectâ 3 x:, perveniet illa ad rectam 3 v:, sed ob hoc, non hactenus spatium æquale figuræ 3 l v: prætergressa erit, neque adeo ab trilineo a n v: portionem illius superiorem æqualem, ex sententiâ, triangulo e i d: secuerit, sed tanto minorem, quantum est spatium illud inter arcus & latera n t: t r: interjacens: quare etiam inferior reliqua trilinei pars major esse debebit trilineo e k d:, & tanto major, quantum est ipsum spatium intercidens latera inter, & arcus n t:, t r:

Quod si ita sese habet portioni rectæ 3 v: interceptæ ab plano trianguli a n 3: ducantur ex eodem puncto 3: deinceps altera alteri infinitè proximæ tres rectæ, quæ diversos terminos habentes, diversa ad puncta cadere debebunt: dico, quod ad hoc, ut mobilis 3 g: progrediatur adhuc quantum spatii intercedit latera inter, & arcus n t: t r: necesse est, ut cadat supra ex ipsis rectis secundam. Nam si hoc a vero alienum sit, cadat primò supra tertiam, & sumpto triente, seu tertia parte basis illius trianguli, cujus ipsa tertia, dictaque intercepta portio rectæ 3 v: duo sunt latera; supra hanc tertiam partem (quæ, uti palam est, tota erit inter duo puncta, altero alteri inhærente) aptatam, ut in extremo puncto r: perpendicularis sit lateri r t:, quod cum arcu r t: convenire videtur, unde eadem extra punctum r: procedet, &, quoad opus est, latere r t: producto, idest eò usque, ut altitudinis 3 h: triplum sit: (sic sibi invicem altitudinibus, & basibus respondentibus)

con-

E perchè nella metà della figura n o:, difalcato il triangolo n p r:, reſtar deve ancora uno ſpazio molto apparente, di qualunque grandezza ſiaſi il ſemicircolo, ſi deſcriva anche in queſto ſpazio (perchè ciò in tal caſo ſi può) un iſoſcele triangolo (i lati di eſſo per la picciolezza delli archi n t: t r: converranno apparentemente con eſſi archi) e quanto importa queſto triangolo, tanto ſi inoltri nuovamente verſo a: la mobile 3 g: ; giugnerà dalla retta 3 x: alla retta 3 v:, ma per queſto non avrà per anche camminato già uno ſpazio eguale alla figura 3 l v:, e perciò dal trilineo a n v: non avrà per anche ſegata la di lui porzione ſuperiore eguale al triangolo e i d:, come ſi volea, ma minore di eſſo tanto, quanto è lo ſpazio fra li archi, e lati n t: t r:, onde ancora la rimanente inferiore dovrà eſſer maggiore del trilineo e k d:. e tanto maggiore, quanto è eſſo medeſimo ſpazio fra i lati, ed archi n t: t r: compreſo.

Il che ſe è così alla porzione della retta 3 v: intercetta dal piano del triangolo a n 3: dallo ſteſſo punto 3: ſi tirino conſeguentemente, e infinitamente proſſime una all'altra tre rette, che avranno per termini diverſi punti, dico, che perchè la mobile 3 g: ſi inoltri ancora uno ſpazio uguale a quello compreſo fra i lati, ed archi n t: t r; deve convenire con la ſeconda di eſſe rette. Imperocchè, ſe queſto non è così, convenga prima con la terza; e preſa la terza parte della baſe del triangolo, di cui eſſa terza, e la detta intercetta porzione della retta 3 v: ſono due lati; ſopra queſta terza parte (che come è manifeſto ſarà tutta fra due punti tra di loro a ridoſſo) adattandola nel punto eſtremo r: perpendicolare al lato r t: che apparentemente con l' arco r t: conviene, onde eſſa avanzerà fuori del punto r:, e prolungando quanto biſogna il lato r t: cioè facendolo triplo dell'altezza 3 h: (reciprocandoſi così le baſi, e le altezze) ſi coſtituiſca un triangolo uguale al trian-

conſtituatur triangulum æquale ſuperius dicto triangulo; apertum erit, fieri non poſſe, ut exceſſus ſpatii hujuſce trianguli ſupra illud lateris, arcuſque r t: major illo ſpatio non ſit aliud inter latus, arcumque n t: comprehenſo: qua de re mobilem 3 g: ſupra tertiam rectam nullo modo cadere debere. Quod præterea ex illo confirmatur, quod ſi in minimas particulas dividatur trilineum a 2 3:, quæ aptentur, aut deſcribantur, deinceps in ſpatio, quod inter tertiam ductam rectam, & rectam 2 3: comprehenditur, reperietur hujuſmodi ſpatium minus illo, quo opus eſt ad recipiendum trilineum a 2 3:, uti, non ſecus ac, ex antecedentibus patet, uſuvenire non debet. Qua etiam de cauſsâ ſi recta 3 g: tertiâ cum rectâ convenire nequit, ut ex recta 3 v: verſus a: ſpatium percurrat æquale ſpatio latera inter & arcus n t: t r: intercepto, nil aliud relinquitur quam quod conveniat aut cum primâ, aut cum ex ipſis rectis ſecundâ. Atqui cum primâ nefas eſt, eò, quia arcus n t: t r: præterquamquòd nullo modo poſſunt in infinitum accedere omnibus ſuis in punctis ad latera n t: t r: quæ ipſis ſubjiciuntur, veluti ad rectam poteſt alia recta, quando forent etiam minimi omnium arcuum, & maximi inter omnes circulos circuli; deinceps etiam ſumpti, ob eorum longitudinem illâ cujuslibet ex ipſis rectis inter ſe infinitè proximis majorem, ſuis cum ſubtenſis ſpatium majus illo inter ipſas rectas comprehenſo comprehendere deberent: ergo, ſecunda cum rectâ neceſſe eſt recta 3 g: conveniat ſolum cum quacumque aliâ, quam ducere queas, rectâ pro re non benè conveniens.

Sed ſecunda ejuſmodi recta infinitè proxima rectæ infinitè proximæ ad rectam 3 v: ſit recta 3 z:, producta in z:, ad rei claritatem, erit igitur per ipſam 3 z: ab trilineo a n v: ſecta ſuperior illius portio æqualis triangulo i e d: & inferior, ſcilicet portio a z 3: æqualis tri-

li-

triangolo ſopra detto; ſarà manifeſto eſſere impoſſibile, che l'eceſſo dello ſpazio di queſto triangolo ſopra quello dell'arco, e lato r t: non ſia maggiore di quello ſpazio, che paſſa fra l'altro lato ed arco t n: onde che la mobile 3 g: non dovrà per il fine detto cadere ſopra la terza retta: La qual coſa ſi conferma inoltre da queſto: che ſe ſi dividerà in minutiſſime porzioni il trilineo a 2 3: adattandole o deſcrivendole di mano in mano nello ſpazio, che fra la terza tirata retta, e la retta 2 3: ſi comprende, ſi troverà queſto ſpazio minore del biſogno per eſſer capace di tutto il trilineo a 2 3: come ſeguire non deve per l'antecedentemente dimoſtrato. Per la qual cauſa ancora, ſe la 3 g: non può convenire con la terza retta per paſſare dalla 3 v: verſo a: uno ſpazio, che uguagli quello fra i lati, ed archi n t: t r: non potrà altro dirſi, ſe non che dovrà convenire o con la prima, o con la ſeconda di eſſe rette. Ma con la prima non può, perchè li archi n t: t r:, oltre che non poſſono eſſere infinitamente proſſimi in tutti i ſuoi punti ai lati n t: t r: che li ſono ſotteſi, come lo può una retta ad un' altra, quando anco foſſero i minimi di tutti li archi, e del più gran circolo, che ſi poſſa dare; preſi ancora di ſeguito, ſtante la loro eſtenſione maggiore di quella di ciaſcheduna di eſſe rette, fra di loro infinitamente vicine, devono con le loro ſotteſe contenere uno ſpazio maggiore di quello contenuto fra di eſſe rette. Dunque con la ſeconda retta ſolo converrà la 3 g:, non potendo con qualunque altra, che ſi poſſa mai tirare, ben convenire.

Or ſia queſta ſeconda retta infinitamente proſſima alla retta infinitamente proſſima alla retta 3 v:, la retta 3 z: prolungata in z: per chiarezza, ſarà dunque da eſſa 3 z: ſegata così la porzione ſuperiore del trilineo a n v: uguale al triangolo i e d:, e la inferiore, cioè la

D por-

lineo e k d: jam duplo trilinei a z 3: immo tota res, ut facilè perſpexeris, abſoluta eſſet, ſi ab veteri, cæptoque divertere itinere honeſtum foret, aut ſatius.

S C H O L I O N.

HIc loci cadit in rem, quod ſi quis ab trilineo a n v: ſecare velit portionem æqualem trilineo e k d:, & quæ in locum jam diſſectæ a z 3: concedere poſſit, haud difficile erit ex ſequenti ſecundâ demonſtratione artem expeditionem eruere.

Fig. 12. Fig. 14. Poſito igitur, quod inferior portio a z 3: æqualis ſit trilineo e k d:, deſcribantur ſupra periphæriam circuli z:, ut nuper circa ſemicirculos, duo æqualia trilinea a b c: a e d: Inter quodlibet ex iſtis, & ſimile g e d:, deſcriptum ſupra periphæriam circuli majoris, & quadrupli ipſius z:, eadem intercedere debebit ratio, quæ in (figurâ 14:) inter ſimilia trilinea ad ſemiperimetros ſemicirculorum interceſſit, & ideo, quoad trilinea, cum in hâc figurâ eadem omnia ſimiliter peracta fuerint, ac in ipsâ (figurâ 14:) quando illic quadrilineum i e k d: æquale erat trilineo a n v:, etiam hic quadrilineum ſimile m r 3 p: æquale erit ſimili trilineo a b c:, atque adeo quadruplum m r 3 p: erit quadruplum a b c:, & quadruplum a b c:, uti cernitur, circumdat circulum z:

Fig. 15. Fig. 12. Deſcribatur igitur circa z: quadruplum a b c:, perfectum erit quadratum circa z: deſcriptum, & quadruplum a b c:, cum æquale ſit quadruplo quadrilinei m r 3 p: æquale etiam erit duobus ſimul ex duabus curvis quinquelineis o p 3 r 4:, & i l 6 3 5: oppoſito, & æquali, eò,

quod

porzione a z 3: uguale al trilineo e k d: già doppio del sopradetto a z 3: , come si ricercava: anzi sarebbe compito tutto, come è facile il conoscere, se il torcere dal vecchio ed intrapreso cammino fosse convenevole, o più utile.

NOTAZIONE.

SI nota quì, che per segare dal medesimo trilineo a n v: una porzione uguale al trilineo medesimo e k d: e che possa sostituirsi in luogo della segata a z 3: si potrà dalla seguente dimostrazione dedurre un più spedito mezzo.

Posto dunque ciò, che la porzione a z 3: uguagli il trilineo e k d:, si descrivano sopra la periferia del circolo z:, come poco fa, intorno a i semicircoli, due eguali trilinei a b c:, a e d: Fra ciascheduno di questi, ed il simile g e d: descritto sulla periferia del circolo maggiore, e quadruplo di z: correrà la medesima ragione, che nella (figura 14:) passava fra i simili trilinei alle semiperiferie dei semicircoli, e perciò essendo, per quello, che riguarda i trilinei, in questa figura le istesse cose similmente state fatte, che (in essa 14:) se nella medesima il quadrilineo i e k d: eguagliava il trilineo a n v:, anche in questa il simile quadrilineo m r 3 p: uguaglierà il simile trilineo a b c:, onde il quadruplo di m r 3 p: sarà il quadruplo di a b c:, ed il quadruplo di a b c: circonderà, come si vede, il circolo z: Fig. 12. Fig. 14.

Si descriva dunque intorno a z: il quadruplo di a b c:, sarà compito il quadrato descritto d' intorno al circolo z:, ed il quadruplo di a b c: essendo uguale al quadruplo del quadrilineo m r 3 p: eguaglierà ancora i due quinquelinei di due curve o p 3 r 4: e l' altro i l 6 q 3: Fig. 15. Fig. 12.

 op-

quòd iſta quinquelinea ſimul ſumpta jam poſita ſunt quadrupla quadrilinei m r 3 p:

Sed hîc loci memineris, quod ubi a parallelogrammo h s t k: (figura 12:) dempta fuere æqualia, reliqua primæ illius compoſitionis, æqualia reliquis ſecundæ, fuere quadrata v i: z l:, una cum parallelogrammo o i l p:, & reliqua ſecundæ fuere circuli v: z:, una cum duobus æqualibus trilineis o g p:, & oppoſito i g l:, cumque nuper demonſtratum ſit, circulum z: ſimul cum duobus quinquelineis o p 3 r 4:, & i l 6 q 5: ſumptum, adæquare quadratum circa ipſum circulum z: deſcriptum, & hujuſmodi quadratum æquale ſit duobus relictis quadratis v i: z l:, quia quodlibet ex ipſis idem quadratum eſt in ipſo z: inſcriptum, auferantur ab reliquiis tum primæ, tum alterius compoſitionis, ea, quæ ſequuntur æqualia, videlicet ab reliquiis primæ, quadrata duo v i:, z l:, & ab reliquiis alterius, quadratum circa z: deſcriptum; quod idem eſt, ac ſi dixeris, duo dicta quinquelinea una cum ipſo circulo z: Manifeſta res eſt, quod poſt ejuſmodi detractiones, remanente uno parallelogrammo o i l p: primæ, unoque circulo v: una cum duobus aliis quadrilineis 4 r 3 g:, & 5 q 6 g: alterius compoſitionis, manifeſta, inquam, res eſt, quod parallelogrammum o i l p: æquale eſt circulo v: una cum iiſdemet quadrilineis duobus ſumpto. Atqui quodvis quadrilineum, conſtructionis virtute, conſtat ex duobus trilineis æqualibus ſingulis trilineo r 3 g: aut &c. ergo parallelogrammum o i l p: æquale erit circulo v:, una cum quadruplo trilinei r 3 g:, vel r 3 p:, vel &c.

Fig. 14. Fig. 12. Sed hic ex integro redeat in memoriam, quod cum paulò ante mobilis recta 3 g:, fixa in puncto 3:, ſecuiſſet ab trilineo a n v:, cadens ſuper rectam 3 z:, portionem illius ſuperiorem æqualem triangulo e i d:, reliquum ipſius a n v: æquabat ſimilis trilinei partem, quæ eſt

opposto, ed eguale; perchè questi insieme presi sono il quadruplo del quadrilineo m r 3 p:

Ma or quì si richiami alla memoria, che dopo tratte dal parallelogrammo h s t k: (figura 12:) eguali cose, le rimanenti del primo di lui componimento eguali alle rimanenti del secondo furono i quadrati v i: z l:, più il parallelogrammo o i l p:, e quelle del secondo furono i due circoli v: z: più i due eguali trilinei o g p: , e l'opposto i g l:, ed essendosi prossimamente veduto il circolo z: più i due quinquelinei o p 3 r 4:, e l'opposto i l 6 q 5:, essere uguale al quadrato d'intorno ad esso circolo z: descritto, ed uguagliando questo quadrato i due quadrati rimanenti v i: z l:, perchè ciascuno di essi è il quadrato inscritto in z:, si tolgano dal rimanente sì della prima, che della seconda composizione queste eguali cose, cioè da quello della prima i due quadrati v i: z l:, e da quello della seconda, il quadrato d' intorno al circolo z:, che vale a dire i due quinquelinei più esso circolo z: E' manifesto, che dopo tali sottrazioni, rimanendovi solo il parallelogrammo o i l p: della prima, e solo il circolo v: più i due altri quadrilinei 4 r 3 g: 5 q 6 g: dell' altra composizione, è manifesto, dissi, che il parallelogrammo o i l p: uguaglia il circolo v: più li istessi detti due quadrilinei. Ma ciascuno quadrilineo costa, per la costruzione, di due trilinei eguali ciascuno al trilineo r 3 g: o ec. dunque il parallelogrammo o i l p: uguaglierà il circolo v: più il quadruplo del trilineo r 3 g:, oppure r 3 p: o ec:

Ma ritorni ancora quì alla memoria, che poco fa la mobile retta 3 g:, già fissa nel punto 3:, avendo segata dal trilineo a n v:, cadendo sulla retta 3 z:, la porzione superiore di lui eguale al triangolo e i d:, il rimanente di esso a n v: eguagliava di un simile trilineo la

Fig. 14.
Fig. 12.

par-

est trilineum ekd:, simile jam parti, vel trilineo modo dicto r 3 g: vel r 3 p: vel &c.

Qua de re si ab trilineo anv: dividi potuit portio æqualis portioni alterius similis trilinei, idest æqualis trilineo ekd:, cum trilineum anv: ad alterum, cujus ekd: est saltem partes, eandem rationem habeat, quam trilineum abc: circa z: descriptum ad simile trilineum ged:, poterit quis etiam ab trilineo abc: secare similiter portionem æqualem simili portioni trilinei ged:, idest æqualem trilineo r 3 p:, vel dixeris, cuilibet mediæ parti unius ex quadrilineis 4 r 3 g: 5 q 6 g:, dum quælibet dimidia pars unius ex quadrilineis est portio trilinei ged:, similis portioni, vel trilineo ekd: & æqualis similiter trilineo r 3 p: vel &c. juxta superius dicta.

Ea propter itaque reliqui vices circuli v: idem æqualis circulus z: obeat, & loco duorum æqualium, quæ circa v: describenda essent, trilineorum, eadem sint trilinea aed:, & abc: circa z: descripta, & qua in ratione in (figura 14:) mobilis, nunquam a puncto 3: decedendo, ipsius trilinei anv:, cadens super rectam 3 z:, secuit verticale latus na:, in eadem secet nunc temporis aliqua alia recta, esto ed:, similiter ducta a puncto medii arcus trilinei abc:, simile latus ejus ba:, evidentissimum est, similia trilinea ab ipsis rectis etiam similiter secari debere, ideoque veluti paulo ante portio az 3: minoris æquabat portionem ekd: alterius majoris, ita nunc temporis similem portionem minoris abc:, quæ esto ade:, æqualem esse simili portioni æque majoris trilinei, idest trilineo 3 r p: vel &c.

Nunc autem quoniam unumquodque ex duobus circa z: descriptis trilineis, uti patet, capax est duorum, quæ æqualia singula quæque sint, segmento ade:,

se-

parte, ovvero il trilineo ekd:, già simile alla parte, o trilineo 3rp: oppure 3rg:, o ec.

Onde se dal trilineo anv: si potè segare una porzione eguale ad una di un altro trilineo simile, cioè eguale al trilineo ekd:, essendo la ragione del trilineo anv: a quello, di cui ekd: e almeno parti, la stessa del trilineo abc: intorno al circolo z: al simile trilineo ged:, si potrà ancora dal trilineo abc: segare similmente una porzione eguale ad una simile del trilineo ged:, cioè eguale al trilineo r3p:, o dicasi a qualunque metà di uno dei quadrilinei 4r3g:, 5q6g:, perchè ciascheduna metà di uno dei quadrilinei è la porzione del trilineo ged: simile alla porzione, o trilineo ekd: ed eguale similmente al trilineo r3p: o ec. come già si disse.

Sia però in luogo del circolo rimanente v: lo istesso z:, e in luogo di due eguali trilinei, che si vorrebbero intorno ad v: descrivere, siano li istessi aed:, abc: descritti intorno a z:, e in qual ragione (nella figura 14:) la mobile fissa nel punto 3:, e cadendo su la retta 3z:, segò del trilineo anv: il lato verticale na:, nella medesima seghi adesso un' altra retta ed:, condotta similmente dal punto posto nella metà dell' arco del trilineo abc: il di lui lato simile ba:, è manifesto, che i trilinei simili saranno segati da esse rette ancora similmente: onde che come la porzione az3: del minore eguagliava prima la porzione ekd: dell' altro maggiore, così la porzione simile, quale sia la ade:, del minore abc:, uguaglierà adesso la porzione simile dell' egualmente maggiore; cioè il trilineo 3rp:, o ec.

Or perchè ciascheduno dei due descritti trilinei intorno az: è capace, come ben si vede, di due segmenti, che eguaglino ciascuno il segmento ade:, se si seghi-

ſegmentorum, ſi ab ſingulis quibuſque trilineis duæ ſecentur portiones, ex quibus quævis æqualis ſit ipſi a d e:, procul erit dubio, quod, cum omnia facta ſegmenta ſint, ſimul ſumpta, quadruplum ſegmenti a d e:, ideſt 3 r p:, vel &c., æquare debebunt duo ſimul quadrilinea 4 r 3 g: & 5 q 6 g:, eò, quòd & ipſa jam fuerint una quadruplum 3 r p:, vel &c.

Quæ cum ita ſint, propterea quod paulo ante circulus z: una cum duobus quadrilineis 4 r 3 g:, & 5 q 6 g:, vel dixeris, una cum quatuor æqualibus a d e: portionibus ab trilineis, quæ ſunt circa z:, defectis, relictus fuit æqualis parallelogrammo o i l p:, erit dimidium ipſius circuli z: una cum dictis quatuor portionibus, ſcilicet totum novelineum D:, minus ipſo parallelogrammo o i l p:, unde & ab ipſo o i l p: demi poterit: & ſi dematur, cum, ſicuti patet, quod demitur ſpatium, rectilineum ſpatium ſit, quod a majori rectilineo trahitur, exceſſus majoris ſupra alterum eſſe debebit adhuc ſpatium rectilineum: quam ob rem rectilineum, quod ſit exceſſus parallelogrammi o i l p: ſupra novelineum D:, æquale erit reliquo ſemicirculo z:, propterea quia etiam ſemicirculo z: ſupra novelineum D: demonſtratum fuit æquale totum parallelogrammum o i l p: Hinc jam haud difficile eſſet toti circulo z: quadratum æquale conſtituere, adeoque ſphæræ, ex cujus maximis circulis unus ſit ipſe z:, cubum æqualem, ſi libitum, perficere.

Tali viâ, perfecto triangulo rectangulo, cujus unum latus ex iis, quæ circa rectum angulum, erat radius circuli z:, cum & idem triangulum duplum foret rectilinei, quod æquale relictum fuit ſemicirculo z:, nactus ſum, peripheriam circuli ad illius diametrum majorem habere rationem, quam 22: ad 7:, uti ſenſit Archimedes. Sed hæc ad ultimam demonſtrationem amandare ſententia eſt. Quod erat demonſtrandum &c.

DE-

ghino da ciaſcheduno di eſſi due trilinei le due porzioni eguali ciaſcuna al ſegmento a d e:, ſarà coſa certa, che tutte le ſegate porzioni, eſſendo inſieme il quadruplo di r 3 p:, o ec., eguaglieranno i due quadrilinei inſieme preſi 4 r 3 g: 5 q 6 g:, perchè furono anche eſſi inſieme il quadruplo di r 3 p:, o ec.

Che ſe ciò è così, perchè antecedentemente il circolo z: più i due quadrilinei 4 r 3 g:, 5 q 6 g:, o ſi dica, le quattro porzioni ſegate eguali ciaſcuna alla a d e: da i due trilinei intorno a z: deſcritti, reſtò uguale al parallelogrammo o i l p:, ſarà la metà di eſſo circolo z: inſieme con le dette quattro porzioni, cioè tutto il novelineo D: minore dell' iſteſſo parallelogrammo o i l p:, onde potrà da eſſo ancora ſottrarſi, e ſottrandoſi, eſſendo, come è manifeſto, uno ſpazio rettilineo, che ſi toglie da un'altro rettilineo, l' eceſſo del maggiore ſopra il minore dovrà eſſere tuttavia uno ſpazio rettilineo: per il che un rettilineo, che ſia l' eceſſo del parallelogrammo o i l p: ſopra il novelineo D:, ſarà uguale al rimanente ſemicircolo z: perchè ancora al ſemicircolo z: ſopra il novelineo D: ſi dimoſtrò eguale tutto il parallelogrammo o i l p: Onde ſarebbe or coſa facile il coſtituire un quadrato uguale al circolo z: ed in conſeguenza il fare un cubo uguale alla sfera, de i di cui maſſimi circoli uno ſia lo ſteſſo z:

Ho ritrovato per tal mezzo, dopo aver fatto un triangolo rettangolo, di cui un lato di quelli d'intorno all' angolo retto, era il raggio del circolo z:, eſſendo ancora eſſo triangolo doppio del rettilineo rimanente eguale al ſemicircolo z:, che la periferia di un circolo al di lui diametro ha maggior ragione di 22: a 7: come fu di parere Archimede. Ma di ciò in particolare nell' ultima dimoſtrazione. Il che era ec.

DEMONSTRATIO II.

Convexâ ex parte alicujus circuli eruta.

Fig. 16. Tab. V.

DEscribantur communi centro alter alterius duplus duo circuli, & in unâquaque illorum dimidiâ parte, sumptis iis partibus, quæ eodem vergunt, inscribatur similiter trilineum, cujus curvæ, vel arcus sint quilibet quarta pars totius periphæriæ circuli, in dimidio cujus describitur, erunt duo similia trilinea inter se, sicut & circuli inter se, atque adeo in ratione dupla.

Sumantur istorum trilineorum dimidiæ partes, ex scilicet ex parte rectæ lineæ cb:, & per rectam kn: dimidientur; erit portio majoris partis, ideft quarta pars totius trilinei majoris, dupla alterius portionis, ideft alterius quartæ partis totius trilinei minoris: unde si ex quartâ majoris trilinei quartam alterius trilinei partem quis demat, reliquum quartæ partis diminutæ æquale erit alteri ablatæ parti.

Tollatur ergo ex quartâ parte klb: trilinei majoris similis pars khe: trilinei minoris, reliquum ipsius klb:, spatium scilicet helb: (cui ob similitudinem spatii semilunularis nomen sit) æquabit ipsam ablatam partem khe:

His positis, subtendantur nunc similibus arcubus ipsarum quæ fuere quartæ partes, rectæ lb:, hc:, perfectæ erunt duæ similes figuræ altera alterius dupla, unde majoris dimidium per rectam mo: factum, æquale erit toti figuræ minori he:

Du-

DIMOSTRAZIONE II.

Presa dalla parte convessa di un circolo.

Fig. 16. Tab. V.

SI descrivano concentrici in ragione fra di loro dupla due circoli, e in ciascuna delle loro metà, prese quelle dalla istessa parte, si inscriva similmente un trilineo, le di cui curve, o archi siano ciascheduno la quarta parte dell'intiera periferia del circolo, nella di cui metà si descrive, saranno fra loro i due simili trilinei, come i circoli fra di loro, e però in ragione dupla.

Si prendano le metà di questi trilinei quelle, che sono dalla parte della retta c b:, e siano divise per il mezzo dalla k n:, sarà la porzione fatta della maggiore, cioè la quarta parte di tutto il trilineo maggiore, dupla dell'altra porzione, o della quarta parte di tutto il trilineo minore, per il che se dalla quarta parte del maggior trilineo si tolga la quarta parte dell' altro, il rimanente della quarta del maggiore sarà eguale alla quarta parte dell'altro.

Si tolga dunque dalla quarta parte k l b: del trilineo maggiore la parte simile k h e: del trilineo minore, il rimanente di k l b:, quale è lo spazio h e l b: (che per la similitudine chiamerò spazio semilunulare) eguaglierà la istessa difalcata parte k h e:

Ciò posto si sottendano adesso alli archi simili di esse quarte parti le rette l b:, h e:, saranno compite due simili figure in ragione fra loro dupla; onde la metà della maggiore fatta da una retta m o: uguaglierà tutta la figura minore h e:

E 2 Si

Ducatur jam ex puncto e:, extremitate figuræ he:, ad punctum, ubi recta mo: majorem bifariam dividit figuram, recta em: & commune sit quadrilineum helm ex una curvâ lm:, quod inter semifiguram lm: , & figuram he: interjectum est, erit quinquelineum rectilineum hemol: æquale quadrilineo duabus ex curvis, heml:, portioni superius dicti spatii semilunularis, uti palam est.

Ejusmodi veritas alio modo demonstrari adhuc posset, sed quia longiori, nimia moles vitatur.

SCHOLION.

QUæ sequitur positio ejusmodi est, ut non solum quis uti posset illâ eo in casu , ubi in superiori demonstratione necesse fuit a minori trilineo secare portionem æqualem alteri portioni similis, & quadrupli trilinei, sed præterea compluribus haud dissimilibus in opportunitatibus.

Fig. 17. Itaque ab integro describantur concentrici duo circuli antecedentibus omnino æquales , & ductis eorum horizontali, verticalique diametris , circa majorem describatur pars dimidia quadrati, quod illi circumscribi posset, idest rectangulum fk:, quod a semidiametro ml: ad punctum contactus l: cadente, dividatur in duo æqualia quadrata fl: ld: Ducatur deinde diametros fl: quadrati fl:, & hâc eâdem ex parte, circa quadrantem alterius circuli minoris, describatur simile quadratum no:, ductis ipsius diametris se invicem ad rectos angulos secantibus, & quæ per rectam 2 3: lateribus quadratorum verticalibus parallelam secabuntur præterea bifariam : dum alterâ ex parte describetur trilineum oma:. ex unâ

Si conduca adeſſo dal punto e: eſtremità della figura he:, al punto, in cui la mo: divide la figura maggiore per mezzo, la retta em: e ſia comune il quadrilineo helm: di una curva lm: che fra la ſemifigura lm:, e la figura he: ſi interpone, farà il quinquelineo rettilineo hemol: uguale al quadrilineo di due curve, heml:, porzione del detto ſpazio ſemilunulare, come è manifeſto.

Queſta verità ſi potrebbe dimoſtrare ancora altrimenti, ma eſſendo alquanto più lunga la dimoſtrazione per fuggire la proliſſità ſi tralaſcia.

N O-T A Z I O N E.

LA ſeguente ſuppoſizione poi non ſolo potrebbe ſervire nell'antecedente caſo della paſſata dimoſtrazione, in cui ſi dovè ſegare da un trilineo minore una porzione eguale ad un'altra di un trilineo ſimile, e quadruplo, ma inoltre in più altre medeſime occorrenze.

Fig. 17.

Pertanto ſi deſcrivano nuovamente con centro comune due circoli eguali alli antecedenti, e tirati i loro diametri, orizontale, e verticale, ſi deſcriva intorno al maggiore la metà del quadrato, che potrebbe circonſcriverſegli, cioè il rettangolo fk: quale dal ſemidiametro ml:, che cada al punto del contatto l:, ſia diviſo in due eguali quadrati fl: ld: ſi tiri poi del quadrato fl: il diametro fl:, e da queſta iſteſſa parte d' intorno al quadrante dell'altro minor cerchio deſcrivaſi il ſimile quadrato no:, tirando i di lui diametri, che ſi ſegano ad angoli retti, e che ſaranno ſegati poi per mezzo dalla retta 2 3: parallela a i lati verticali de i quadrati; mentre dall' altra parte deſcriveraſſi il trilineo di

una

nâ curvâ, quod erit æquale dimidiæ parti totius minoris trilinei duabus ex curvis in antecedenti (figura 16.) eritque per diametrum m k: bifariam dispertitum.

Jam bene satis apparet, quod trilineum l k d: extrorsum cadens, dimidium est alterius majoris duabus ex curvis trilinei in eâdem figurâ antecedenti descripti, eò, quòd eadem, ac illius dimidium, latera, nec non arcum habet: quare cum alterum o m a: dimidium sit minoris, palam est, quod etiam portiones per rectam k m: factæ eædem erunt eorundem quartæ partes.

Cum itaque sit quadratum f l: duplum quadrati similis n o: juxta circulorum inter se rationem, erunt dimidiæ quoque ipsorum partes in eadem proportione, quare triangulum f g l: duplum erit trianguli similis, & oppositi n m o:

Nunc, rebus sic stantibus, fingamus oportet, quod quædam recta linea, hæc esto semidiametros m l: perpendicularis rectæ horizontali g k: sive f d: æquabiliter per directionem l g: vel m f: quaecunque datâ velocitate moveatur: sed ita, ut sibi ipsi semper existat parallela: assero opus esse, ut ejusmodi recta mobilis, antequam ad terminos g: & f: perveniat, in aliquo suæ directionis puncto ab dictis duobus triangulis f g l: & n m o: partes dissecet æquales.

Nam cum ita ea triangula collocata sint, ut mobilis, motus sui æquabilis tempore versus g: vel f: debeat minori in triangulo ex segmentis ejusdem majoribus, & majoribus, quam illa, quæ eodem tempore in triangulo perficit majori (si sumantur tamen segmenta versus similes triangulorum horizontales partes l: & n:) transire deinceps ad segmenta minora, & minora tandem illis, quæ eodem semper tempore efficiet in eodem triangulo majo-

jo-

una curva o m a:, che sarà eguale alla metà di tutto il trilineo minore di due curve nell' antecedente (figura 16.) e sarà dal diametro m k: diviso per il mezzo.

Già ben si vede, che il trilineo l k d: che cade di fuora è la metà dell'altro maggior trilineo di due curve nell'istessa figura antecedente descritto, perchè eguali a quelli della di lui metà ha i lati, e l'arco: onde essendo l'altro o m a: la metà del minore, si vede, che ancora le porzioni fatte dalla k m: saranno le istesse quarte parti de' medesimi.

Essendo pertanto il quadrato f l: duplo del simile n o: attesa la ragione dei circoli fra di loro: saranno ancora le metà di essi quadrati nella medesima proporzione, onde il triangolo f g l: sarà duplo del simile ed opposto n m o:

Or ciò essendo, si supponga, che una linea retta, quale sia la retta, o semidiametro m l: elevata perpendicolarmente alla orizontale g k: oppure f d: si muova equabilmente per la direzione l g: oppure m f: con qualunque velocità, ma in modo, che si mantenga sempre equidistante a se stessa: dico esser necessario, che questa retta mobile, prima di giugnere ai termini g: ed f: seghi in qualche punto della sua direzione dai detti due triangoli f g l: n m o: porzioni uguali.

Imperocchè essendo i triangoli posti talmente, che la mobile nel suo equabile movimento verso g: ovvero f: deve nel triangolo minore successivamente passare da' segmenti di esso maggiori, e maggiori di quelli, che nello stesso tempo fa nel triangolo maggiore (prendendosi però i segmenti sempre verso le parti simili orizontali l: ed n: dei triangoli) a segmenti minori, e minori finalmente di quelli, che nello stesso tempo farà nello stesso trian-

an-

jori, necesse est (dum a majori ad minus per successionem transitus non potest fieri (nihil omnino officientibus nonnullis contra demonstrationibus, veluti illa de transitu possibili ex angulo semicirculi ad angulum, qui dicitur contingentiæ, intacta æqualitate) nisi prius fiat transitio per æquale: ab æqualitate enim, vel juxta Gersonem, initium majoris & minoris desumendum est) ut antequam ex segmenti trianguli minoris majoribus, & majoribus, quam illa trianguli majoris delabatur ad segmenta minoris trianguli minora, & minora illis ipsius trianguli majoris eodem tempore factis per æqualia transeat segmenta. Unde id deinde eruatur, quod punctum, ubi mobilis segmenta effectura est æqualia, illud sit in rectis directionem mobilis significantibus, quod medium erit inter reciprocum excessum, & defectum segmentorum, in quæ, tum hinc, tum illinc a mobili triangula dividentur: cum post ejusmodi punctum, segmenta, quæ fuere majora, minora esse debeant, & versâ vice in altero triangulo, non secus, ac primo liquet obtutu. Haud dissimili modo duo indices in minoribus horologiis, si fingerentur alter altero velocius vicissim moveri in aliquo suæ sphæræ puncto convenire deberent: atque ita esto, quod recta mobilis pervenerit in locum rectæ 3 2:, cum duo triangula 2 n 4:, 3 5 l:, quæ ibi ab ipsa secantur, sint inter semet æqualia, eò, quod propter laterum parallelismum cum similia sint, æqualia etiam habent homologa latera 2 4:, & 5 l:, eò, quia in parallelogrammo l 4: latus l s: æquale est opposito lateri o 4:, quod æquale est reliquo n 4:, quia æqualia dimidia sunt diametri n o: per rectam 3 2: facta: erunt ipsa triangula n 2 4:, & 3 5 l: æqualia segmenta triangulorum f g l:, & n m o: facta in punctis 2: 3: per mobilem m: l:, antequam perveniat ad terminos g:, & f:, uti dictum fuit. Quare etiam ipsis in punctis 2: 3: necesse erit, uti sit punctum illud medium inter reciprocum excessum, & defectum inter triangulorum segmenta, quod, datis

tri-

triangolo maggiore, fa di meſtiero (mentre per paſſare ſucceſſivamente dal maggiore al minore (non oſtanti alcune dimoſtrazioni, come del paſſaggio, che ſi può fare dall' angolo del ſemicerchio all' angolo detto del contatto ſenza toccare l' ugualità) deveſi prima paſſare per l' uguale, perchè a ſentimento ancora di Gerſone, dall' uguale il più, ed il meno principia) che avanti, che da i ſegmenti del triangolo minore maggiori e maggiori di quelli del triangolo maggiore, paſſi a i ſegmenti del minor triangolo minori, e minori di quelli dell' iſteſſo triangolo maggiore contemporanei, paſſi per ſegmenti uguali. Onde ne ſegua poi, che il punto, in cui farà la mobile uguali i ſegmenti, ſia quel punto nelle rette, che ne dimoſtrano la direzione, che farà medio o di mezzo, fra il reciproco eccesso, e difetto de i ſegmenti di eſſi triangoli, fatti dall' una, e dall' altra ſua parte dalla retta mobile: giacchè dopo di eſſo i ſegmenti ſtati maggiori devono eſſere i minori, e viceverſa nell' altro triangolo, come è manifeſto. Così ſe due indici orari negli orivoli minori ſi ſupponeſſe, che l' un dell' altro a vicenda, ſi muoveſſero più velocemente, dovrebbero in qualche punto della loro sfera convenire; e così giunta la mobile nel luogo della retta 3 2:, eſſendo i due triangoli n 2 4:, 3 5 l:, che quivi ſega, eguali fra loro: perchè per il paralleliſmo de i lati eſſendo ſimili, hanno ancora uguali li omologhi lati n 4:, 5 l:, perchè nel parallelogrammo 1 4: il lato 1 5. uguaglia l' oppoſto o 4:, che eguaglia il rimanente n 4:, perchè ſono le eguali metà del diametro n o: fatte dalla retta 3 2: ſaranno eſſi triangoli n 2 4: 3 5 l: i ſegmenti eguali de i triangoli f g l:, n m o: fatti ne i punti 2: 3: dalla mobile m l: prima di giugnere a i termini g:, ed f:, come ſi diſſe. Onde ancora in eſſi punti 2: 3: converrà, che ſia quel punto medio fra il reciproco eccesso, e difetto de i ſegmenti de i triangoli, che poco fa ſi dimoſtrò, che, dati i di loro eguali ſegmenti anche egli allora de-

triangulorum æqualibus segmentis, illicò ipsum quoque patefieri debere nuper demonstratum est], veluti, ipso dato, æqualium locum versâ vice præfiniri segmentorum. Sed si hoc fit in triangulis, cum alterâ ex parte in circulis sint trilinea lkd:, oma: in eadem inter se ratione, & non secus, ac triangula collocata, nonne in trilineis quoque fiet? Atqui eodem de nomine debet.

Moveatur ergo similiter eadem recta lm: per directionem lk:, vel md:, quando, ob superius dicta, eò pervenerit, ubi punctum illud sit, inter reciprocum excessum, & defectum inter trilineorum segmenta medium, ibi secare debebit similes versus horizontales partes, ab iisdem trilineis portiones æquales. Ducatur itaque, hic loci quoque, parallela rectæ ml: recta 32:, sed ita, ut quartam partem totius arcus trilinei majoris lkd: dividat, dico, quod cum recta lm: in locum venerit rectæ 32:, ibi ab duobus trilineis æquales secabit portiones, eò, quòd ibi punctum inter reciprocum excessum, & defectum inter eorundem segmenta hinc, & illinc a mobili facta, ut in triangulis, medium reperietur.

Nam si rectæ 32: utraque ex parte ferè infinitè proxima alia recta linea ducatur, & ea uniuscujusque trilinei portio, quæ inter dictam rectam 23:, alteramque illi ductam proximam versus easdem intercipitur partes, sumatur; satis apparebit, quod veluti portio minoris trilinei minor erit portione majoris versus kd:, ita pars trilinei minoris major erit parte majoris versus ml: Prætterquamquòd mage versus ml: extra rectam 32: nequit hujusmodi punctum consistere, quia dato, quod esset in rectâ lineâ re:, quæ ductâ rectâ oa: transit per sectionis punctum x:, cum recta ar: tangens arcus trilinei minoris æqualis sit (eò, quòd dimidium est radii am:, sicuti est reliqua rm:, latus parallelogrammi

me:)

ve esser noto, e che, essendo esso noto, è viceversa noto il luogo de i segmenti uguali. Ma se ciò segue ne i triangoli, essendo dall' altra parte ne i circoli i trilinei lkd:, oma: nella stessa ragione fra loro, e similmente, che li triangoli collocati, forse seguir non dovrà ancora nei trilinei? Ma per la stessa ragione così esser deve.

Si muova dunque similmente la medesima retta lm: per la direzione lk:, oppure md: giunta, per il detto sopra, che sarà al luogo del punto medio fra il reciproco eccesso e difetto dei segmenti dei trilinei, nello stesso segar dovrà dai medesimi verso le parti simili orizzontali, eguali porzioni. Si tiri quì ancora pertanto parallela alla mk la retta 32:, ma che seghi un quarto di tutto l'arco del trilineo maggiore lkd:, dico, che arrivata la lm: nel luogo della retta 32: iv segherà dai due trilinei le porzioni eguali, perchè ivi sarà il punto medio tra il reciproco eccesso, e difetto dei segmenti dei medesimi, fatti dall' una, e l'altra sua parte dalla mobile, come appunto nei triangoli.

Imperocchè se si tiri alla retta 23: dall' una, e dall' altra di lei parte quasi infinitamente prossima un' altra retta, e si prenda quella parte di ciascun trilineo, che dalla detta 23: e la condotta a lei prossima retta si può contenere, verso le istesse parti, sarà manifesto, che come la parte del trilineo minore, e minore di quella del maggiore verso kd:, così la parte del trilineo minore sarà maggiore di quella del maggiore verso ml: Oltre che più verso ml: fuori della retta 32: non può essere tal punto, perchè posto, che fosse nella retta re:, che tirata la oa: passa per il punto x: del segamento, essendo l'ar:, tangente dell' arco del trilineo minore, eguale (perchè è la metà del raggio am: , come è la

 ri-

me:) rectæ le:, tangenti arcus trilinei majoris, eò, quòd le :ipsi lateri rm: oppositum latus est: cumque arcus trilinei minoris ab tangente sua in pari distantia a puncto contactus a: removeatur magis, quam arcus trilinei majoris ab suâ, ideo quia arcus circuli minoris est; atque adeo in pari etiam distantiâ cum ipsa tangente contineat majus spatium, quam cum suâ idem arcus majoris; esset major portio æqualis minori. Neque mage kd: versus, quia dato, quod esset in rectâ ty: quæ ab rectâ 23: æquè distat, ac rectâ er: secta rectâ lt: in b: ut æqualis sit rectæ ay: ductisque intra duo parva trilinea azy: lti:, sed utrobique tantumdem procul ab sectione per rectam ty: facta, ipsique sectioni parallelis, aliis lineis numero æqualibus usque ad extrema puncta b: & a: foret trilineum, cujus deinceps altitudines majores sunt altitudinibus alterius trilinei, latus præterea tl: majus latere ay:, æquale illi, quod altitudines, & latus minora habet: id, quod fieri nequaquam potest eò, quod curva circularis omnibus suis in punctis, paribus in distantiis, propior sit trilinei minoris, quam lateri trilinei majoris: præter illud, quod in majori trilineo ipsa magis extendatur: quam ob rem punctum inter reciprocum excessum, & defectum segmentorum medium, cum nec ante, neque post inveniri queat, opus est in ipsa hæreat 23:, quo in loco parvo trilineo, vel dicas, segmento minoris trilinei, si latus latere segmenti trilinei majoris minus habeat, non deerit tamen altitudo altitudine major: uti facile per te, si libitum, noveris.

Igitur, postquam pervenerit mobilis ml: ad puncta 2: 3: in iisdem secabit a trilineis æquales, quas diximus a2: l3: portiones, ex quibus portio l3: arcum habet, qui arcus trilinei majoris lkd: quarta pars est, uti ex præteritis colligitur.

His

rimanente rm:, lato del parallelogrammo me:) alla le: tangente dell'arco del trilineo maggiore, perchè le: è il lato opposto ad rm:, e l'arco del trilineo minore discostandosi dalla sua tangente in pari distanza dal punto del contatto a: più di quello del maggiore dalla sua, per essere arco di circolo minore, e perciò in pari distanza contenendo con essa un maggiore spazio, che con la sua quello del maggiore, sarebbe la porzione maggiore eguale alla minore. Nè più verso kd: perchè se fosse nella retta ty: ugualmente distante che la er: dalla 23: segando uguale alla retta ay: la lt: in b: e tirando nei due piccoli trilinei azy: lti: che siano egualmente distanti dalla sezione fatta dalla retta ty:, e parallele ad essa, altre rette di numero eguali fino all'estremità b: ed a: sarebbe il trilineo, che ha le altezze di mano in mano maggiori delle altezze dell'altro, ed inoltre il lato tl: maggiore del lato ay:, uguale a quello, che ha le altezze, ed il lato minori: ciò, che esser non può, per essere la curva circolare in tutti i suoi punti, nelle distanze uguali, più vicina al lato del trilineo minore, che del maggiore, oltre poi il dilungarsi più nel maggiore: per il che il punto medio tra il reciproco eccesso, e difetto dei segmenti non potendo essere nè avanti, nè dopo, conviene, che sia in essa 23:, dove il piccolo trilineo, o segmento del trilineo minore, avendo il lato minore del lato di quello del maggiore, avrà appunto l' altezza maggiore dell' altezza: come sarà cosa facile a ciascuno il riscontrare.

Arrivata dunque che sia la mobile lm: ai punti 2: 3: segherà in essi dai trilinei le eguali porzioni, che si differo le a2: l3:, delle quali la l3: ha per arco la quarta parte dell'arco del trilineo maggiore lkd: per il sopra detto.

Po-

Fig. 16. His positis ad (fig. 16:) redeundum est, eam ad partem, ubi non adest recta c b: ductaque ab extremitate x: diametri minoris recta x 2:, secante in puncto 2: a majori trilineo quartam partem illius arcus, juxta ac per rectam e m: ibi factum fuit, ubi recta c b: adest, ex puncto 2: sectionis cadat ad eandem diametrum perpendiculariter recta 2 3: evidens est portionem f 3 2: quam ipsa ab hoc dividit trilineo c k f: quod idem omnino est, ac in antecedenti (figura 17: trilineum extrorsum cadens, eandem esse adamussim, ac portio ab illo dissecta per mobilem rectam m l:, ubi pervenit ad puncta 2: 3:, ideoque non secus, ac tum illi, isti quoque nunc poterit altera æqualis portio ab trilineo g k x: tantundem minore secari.

Abscindatur ergo a minore trilineo g k x: pars æqualis dictæ portioni f 2 3: trilinei majoris c k f:, erit ejusmodi pars, pars x 5 6:, ea videlicet quæ æqualis est a 2:, portioni æqualis trilinei in (figura 17:) Quare si pars x 5 6: ea sit, quæ æquat partem f 2 3:, & non secus, ac ab f 2 3: rectangulum triangulum x 2 3:, ita ab x 5 6: æquale triangulum auferatur, triangulum scilicet 7 6 5: ob æqualem ab æqualibus detractionem, reliqua portio f x 2: majoris trilinei æquabit reliquam x 7 6: alterius trilinei minoris portionem.

Quæ cum ita sint eo, quod nuper semilunulare spatium ex parte rectæ c b: adæquabat quartam trilinei minoris partem k h e:, videlicet partem a k x: ex ista, apertum est, quod dictum semilunulare spatium (ipsum quoque sumptum ex parte a k x:) demptâ portione f x 2:, æquale erit eidem parti a k x:, demptâ æquali portione x 7 6:, sive dixeris, quadrilineum x a 2 8: duabus ex curvis 2 8: x a: æquale erit quadrilineo 7 6 a k: unâ ex curvâ b a:, non secus ac ne fugit quidem obtutum.

Sed

Posto ciò si riveda la (figura 16:) in quella parte, in cui non è la retta cb:, e condotta dall' estremità del diametro minore x: la retta x2:, che seghi nel punto 2: dal maggior trilineo la quarta parte del di lui arco, come fu fatto dalla retta em: nel luogo, dove è la retta cb:, dal punto 2: del segamento cada al medesimo diametro perpendicolarmente la retta 23: è manifesto, che la porzione f32:, che essa divide da questo trilineo ckf:, che è lo stesso, che nella antecedente (figura 17:) cadeva di fuori, sarà la medesima appunto della segata da quello dalla retta mobile ml:, giunta nei punti 2: 3: , onde come allora si potè a quella, così ancora a questa segarsene potrà adesso una eguale dal trilineo egualmente minore gkx: Fig. 16.

Si seghi dunque dal trilineo minore gkx: la porzione uguale alla detta f23: del maggiore trilineo ckf: sarà questa la porzione x56:, cioè quella, che è la eguale alla a2: parte dell' eguale trilineo (nella figura 17:) sicchè se la porzione x56: sia quella, che uguaglia la porzione f23: , e si tolga come dalla f23: il triangolo rettangolo x23: così dalla x56: un egual triangolo, che sia il triangolo 765:, per l'egual detrazione da cose eguali, la rimanente porzione fx2: del trilineo maggiore uguaglierà la rimanente x76: del trilineo minore.

Il che essendo così, perchè antecedentemente lo spazio semilunulare uguagliava dalla parte della retta cb: la quarta parte khe: del trilineo minore, cioè la parte akx: da questa, è evidente, che detto spazio semilunulare (preso quello dalla parte akx:) meno la porzione fx2:, uguaglierà la testè akx: meno la egual porzione x76:, cioè a dire, il quadrilineo xa28: di due curve 28: xa: uguaglierà il quadrilineo 76ak: di una curva ba:, come ancora è ben chiaro. Ma il quadri-

Sed quadrilineum xa28: idem eſt, ac quadrilineum ehml: alterâ ex parte rectæ cb: quod æquale fuit ſpatio rectilineo, ſcilicet quinquelineo hemol:, quia ſemifigura lm: æqualis fuit figuræ he:, ergo ſi quadrilineum xa28: adæquat rectilineum aliquod ſpatium, etiam quadrilineum 76ak: æquale eſſe debebit eidem ſpatio rectilineo.

Quam ob rem ſubtendatur nunc curvæ, vel arcui quadrilinei 76ak: recta aliqua linea, perfectum erit rectilineum quoddam ſpatium: ſed majus ipſo 76ak:, atque adeo majus rectilineo illo æquale ipſi 76ak:, quâ de cauſsâ poterit a majore minus ſubtrahi quod eſt æquale 76ak:, & ſubtracto; quoniam debet ex majori rectilineo, rectilineum adhuc relinqui ſpatium, erit ejuſmodi reliquum ſpatium, æquale figuræ ba: quia ipſa figura ba:, uti ſatis, ſuperque liquet, eſt exceſſus rectilinei majoris quadrilineo 76ak:, ſupra ipſum 76ak:, ſive ſupra rectilineum illi æquale.

Hinc tandem erui poteſt, quod ſi curva, vel dicatur arcus 6a:, ſit forte, ut numerus ad numerum, quoad integram ſui circuli periphæriam, facillimum eſt rectilineum, ſeu quadratum aliquod ejuſdem circulo, atque adeo ſuæ ſphæræ cubum, vel aliud ſolidum rectilineum æquale conſtituere. Quod ſi irrationalis; modi in ultimâ demonſtratione traditi adhibendi erunt. Quod erat &c.

DE-

drilineo x a 2 8: è lo istesso quadrilineo e h m l: dall' altra parte della retta c b: , che fu uguale ad uno spazio rettilineo, cioè al quinquelineo h e m o l: , perchè la semifigura l m: fu uguale alla figura h e: , dunque se il quadrilineo x a 2 8: uguaglia un rettilineo, anche il quadrilineo 7 6 a k: eguaglierà lo istesso rettilineo.

Per il che si sottenda ora alla curva, o arco del quadrilineo 7 6 a k: una retta linea, sarà compito uno spazio rettilineo, ma maggiore di esso 7 6 a k: , e perciò di quel rettilineo uguale ad esso 7 6 a k: onde si potrà dal maggiore sottrare il minore eguale a 7 6 a k: , e sottrandosi, perchè del maggior rettilineo restar vi deve poi uno spazio rettilineo, sarà questo spazio rimanente uguale alla figura 6 a: , perchè la figura stessa 6 a: è, come ben si vede, l' eccesso del rettilineo maggiore del quadrilineo 7 6 a k: sopra esso 7 6 a k: , oppure sopra il rettilineo, che lo uguaglia.

Si deduce finalmente da ciò, che se la curva, o arco 6 a: stia all' intiera periferia, come un numero ad un numero, è cosa molto facile il costituire un rettilineo, o quadrato eguale al di lui circolo, e in conseguenza ancora il fare un cubo, o altro solido rettilineo uguale alla sua sfera. Ed essendo irrazionale, potrà uno servirsi dei modi nell' ultima dimostrazione assegnati. Il che ec.

DEMONSTRATIO III.

Sumpta ex parte interiori alicujus circuli.

Fig. 18. Tab. VI.

DEscribatur quocunque modo circulus, ducanturque illius diametri horizontalis, & verticalis, & altera secans bifariam rectum angulum ad centrum, & quia alicujus circuli semidiametros potest esse diametros alterius circuli subquadrupli, describatur supra horizontalem semidiametrum g c: semicirculus, & hac eadem ex parte subtendatur angulo recto centrali latus f c: quadrati, quod eodem in circulo inscribi potest, superque illud, centrum circuli versus, describatur arcus f d: trilinei f g c:, & ab ejusdem lateris extremis punctis, eodem, quo semicirculus descriptus fuit, intervallo, ducantur ad punctum d:, ubi ab altera diametro arcus trilinei bifariam sectus erit, æquales arcus f d., c d:, & supra ipsius lateris dimidium describatur figura f h:, æqualis figuræ c h:, quam idem latus f c: a semicirculo dissecat.

Cum igitur semicirculus subquadruplus sit dimidiæ circuli partis, cumque in ipso inscriptum sit triangulum g h c:, erit angulus verticalis g h c: angulus rectus: atqui angulus g: dimidium anguli recti est per alteram diametrum factum, ergo reliquus angulus c: dimidium quoque recti anguli erit: qua re cum latera ipsius trianguli æqualibus angulis subjecta, inter se æqualia sint, erit etiam quodlibet ex ipsis, latus quadrati, quod pleno in circulo posset quis inscribere, ideoque latus c h: secabit a semicirculo figuram c h:, illius similem figuræ, quam a circulo secat latus c f:, unde figura c h: subquadrupla erit figuræ c f: pro semicirculorum inter se

ra-

DIMOSTRAZIONE III.

Presa dalla parte concava di un circolo.

SI descriva in qualsivoglia modo un circolo, e si tirino i di lui diametri, orizontale, e verticale, ed un altro, che seghi per il mezzo l' angolo retto al centro; e perchè il semidiametro di un circolo può essere il diametro di un altro circolo suqquadruplo, si descriva sopra il semidiametro orizontale g c: un semicircolo, e da questa istessa parte si sottenda all' angolo retto al centro il lato f c: del quadrato, che nello stesso circolo si può inscrivere, e sopra di esso verso il centro del circolo descrivasi l' arco f d: del trilineo f g c:, e dall' estremità di esso lato, con lo istesso intervallo, con cui fu descritto il semicircolo, si tirino al punto d:, in cui sarà segato per mezzo l' arco del trilineo dall' altro diametro, li archi eguali f d:, c d:, e sopra la metà f h: del medesimo lato descrivasi la figura f h: eguale alla figura c h:, che l' istesso lato f c: sega dal semicircolo.

Fig. 18. Tab. VI.

Essendo dunque il semicircolo suqquadruplo della metà del circolo, ed essendo in esso inscritto il triangolo g h c: sarà l' angolo verticale g h c: un angolo retto: ma l' angolo g: è la metà di un retto fatta dall' altro diametro: sicchè l' angolo rimanente c: sarà la metà pure di un retto; onde i lati di esso triangolo sottoposti alli eguali angoli, essendo tra loro eguali, saranno ancora ciascuno un lato del quadrato, che nel compito circolo si inscriverebbe, e perciò il lato c h: segherà dal semicircolo la figura c h: simile a quella, che sega dal circolo il lato c f:, onde la figura c h: sarà suqquadrupla della figura c f: attesa la ragione dei se-

 mi-

ratione. Si itaque figura cf: quadrupla eſt figuræ ch:, dimidium figuræ cf: duplum erit ipſius ch:, & quia dimidium cf: eſt portio ce:, ſi ab ipſa ce: auferatur figura ch:, reliquum ce: æquale erit ch:

Illud reliquum ce:, quod finitur & ab duobus circulorum in ratione quadrupla inter ſe arcubus, qui eodem inflexi ſimul concurrunt in puncto c:, alteraque ex parte ab recta eh: diſtantia peripheriæ circuli ab latere fc:, appellabo figuram bicuſpidem, quaſi bicuſpidatam, aut duas cuſpides præſeferentem, non ſecus, ac ſimul ſumptum cum alia æquali bicuſpide, altera ex parte fh: deſcripta, totum vocabo figuram tricuſpidem ob tres, quas tum cuſpides repræſentat.

Cum igitur tricuſpis chfe: ſit dupla bicuſpidis che: eò, quòd ſint duæ ſimul bicuſpides; nihil in primis dubitans poſſe fieri ſuper eadem baſi, vel arcu fc: ipſius tricuſpidis, & per arcus, qui in eadem ſemidiametro eg: ſimul concurrant (quamcunque altitudinem ad id habere eos deceat) & qui ejuſdem circuli ſint, cujus ii ſunt tricuſpidis arcus, qui concurrunt in h:, alteram tricuſpidem, quæ dupla ſit tricuſpidis chfe:, ſeu, quod eſt idem, quadrupla bicuſpidis che:, ideo, quia cum manifeſtum ſit, quod altera major, & altera minor, quam dupla, fieri poſſit per arcus majores, aut minores, neceſſario altera etiam dupla fieri poſſe debet, dico, ſi loco arcuum fh, ch: tricuſpidis chfe: ſumantur arcus fd:, cd:, qui concurrunt in d:, ideſt uno verbo ſit tricuſpidis altitudo ed: dupla altitudinis eh:, locum baſis ſemper eodem arcu fc: tenente, quod perfecta erit altera tricuſpis dupla tricuſpidis chfe:, vel quadrupla bicuſpidis che:

Nam

micircoli fra loro. Or se la figura cf: è quadrupla della ch:, la metà della cf: sarà dupla di essa ch:, e perchè la metà della cf: è la parte ce:, se si tolga da essa ce: la figura ch:, il rimanente della ce: sarà eguale a ch:

Il rimanente della ce: , che ha per termini due archi di circoli fra loro in ragione quadrupla, quali archi piegati verso lo stesso luogo concorrono nel punto c:, e dall' altra parte una retta eh: , distanza della periferia del circolo dal lato fc:, lo chiamerò figura bicuspide, quasi bicuspidata, o che abbia due cuspidi: siccome preso insieme con la egual bicuspide descritta dall' altra parte fh: , tutto lo chiamerò una figura tricuspide per le tre cuspidi, che rappresenta.

Essendo pertanto la tricuspide chfe: dupla della bicuspide che:, perchè sono due bicuspidi insieme, nulla dubitando in primo luogo potersi fare sulla stessa base, o arco fc: di detta tricuspide, e con archi, che concorrano nello stesso semidiametro eg: (a qualsivoglia determinata altezza ciò deva essere) e che siano del medesimo circolo, del quale sono li archi della tricuspide, che concorrono in h:, un'altra tricuspide, che sia dupla della chfe:, cioè quadrupla della bicuspide che:, per questo, perchè vedendosi, che se ne può fare una minore, ed una maggiore che dupla con archi minori, e maggiori, necessariamente se ne deve poter fare anche una dupla; dico se in vece delli archi fh:, ch:, della tricuspide, chfe: si prendano li archi fd:, cd:, che concorrono in d:, cioè in una parola si prenda l' altezza ed: dupla della eh: , servendo sempre di base lo istesso arco fc:, che si sarà fatta un altra tricuspide dupla della tricuspide chfe: , oppure quadrupla della bicuspide che:

Im-

Nam si tricuspis c h f e: dupla est bicuspidis c h e:, & pro altitudine habet eandem ipsius altitudinem e h:, sed pro basi, cum duæ in unum bicuspides sint, arcum duplum arcus, basis ipsius, necesse erit, ut eadem quadrupla sit c h e:, quando habeat tum basis basim duplam, tum altitudinem duplam altitudinis ipsius c h e:, quomodo se habet altitudo e d: ad altitudinem e h: & id tum propterea quia (si fingamus, quod sumpto semper arcu f c: pro basi, jam perfecta esset tricuspis quadrupla bicuspidis c h e: ista altitudinem altitudinis illius duplam habere deberet) nam esset ista tricuspis ad c h e:, sicuti figura circuli ad similem c h: semicirculi; Atqui figura circuli, cum sit quadrupla figuræ c h: semicirculi, & pro basi duplum cordæ, basis illius habeat, necesse est, ut altitudine quoque dupla altitudinis illius donetur, (veluti satis perspectum est) ergo sic data tricuspis, cum sit quadrupla bicuspidis c h e:, basim habens duplam basis illius, necesse erit, ut etiam altitudine altitudinis illius dupla minimè careat. Nihil officiente diversa arcuum in circularibus figuris qualitate, quia circuli figura, si basim, & altitudinem duplam habeat basis, & altitudinis figuræ semicirculi, nequit ullo alio arcu, quam arcu circuli quadrupli, quadrupla ejusdem fieri, secus, ac data tricuspis, quæ licet arcus habens, qui sint ejusdem circuli, cujus sunt arcus figuræ c h f e:, potest tamen esse dupla ejusdem tricuspidis c h f e:, eo, quod & major, & minor, quam dupla ipsius, pro majori, minorive, quam e h:, altitudine, demonstrari possit, ut etiam paulo ante significatum est, immo ex se luculente patet.

Sed nihilo tamen minus data tricuspis dupla non sit tricuspidis c h f e:, quadrupla scilicet bicuspidis c h e:, dimidium quoque illius, duplum non erit c h e:, sed aut majus, vel minus, quam duplum: sitque primo majus;

Imperocchè se la tricuspide chfe: è dupla della bicuspide che:, ed ha per altezza la istessa altezza eh: di essa: ma per base, per essere due bicuspidi unite insieme, un arco duplo dell' arco base di essa, dovrà la medesima esser quadrupla di che:, avendo non solo per base il duplo della base, ma ancora per altezza il duplo dell'altezza di essa che:, quale è l'altezza ed: dell' altezza eh:, e ciò ancora perchè (dato, che si fosse già fatta sempre con l' istesso arco fc: per base, la tricuspide quadrupla della bicuspide che: dovrebbe questa avere l' altezza doppia dell' altezza di quella) imperciocchè sarebbe questa tricuspide alla che:, come la figura del circolo alla simile ch: del semicircolo: Ma la figura del circolo essendo quadrupla della ch: del semicircolo, e avendo per base il duplo della retta, o sottesa, che è base di essa, è necessario, che abbia ancora l' altezza dupla dell' altezza di essa (come è assai noto) dunque così la data tricuspide essendo quadrupla della bicuspide che: avendo la base dupla della base di essa, dovrà avere ancora l' altezza dupla dell' altezza di essa. Non ostante la qualità diversa delli archi nelle figure circolari: perchè la figura del circolo avendo dupla la base, e dupla l' altezza della base, e altezza di quella del semicircolo, non può con altro arco, che di un circolo quadruplo esser quadrupla della medesima, a differenza della data tricuspide, quale con archi del medesimo circolo, di cui sono li archi della chfe:, può esser dupla della medesima tricuspide chfe:, perchè si può di essa con maggiore, o minore altezza della eh:, dimostrare maggiore, o minore, che dupla, come eziandio poco avanti fu detto, anzi ben si discerne.

Ma con tutto ciò non sia la data tricuspide dupla della chfe:, cioè quadrupla della bicuspide che:, ancora la metà di essa non sarà dupla della ch'e:, ma o maggiore, o minore, che dupla, e sia in primo luo-

go

jus; iisdemque in altero circuli quadrante exaratis re-
Fig. 18. bus, ex parte arcus bd:, ipsi eidem arcui bd:, eodem, quo semicirculus descriptus fuit, intervallo, ad minuendam, quam minime licet, altitudinem ed:, ducatur infinite proximus arcus bx: Nunc temporis ergo (nisi enim nunc, nec data qualibet minori altitudine) dimidium tricuspidis, cujus arcus est bx:, duplum erit bicuspidis che:, vel bhe: vel duplum figuræ bh: semicirculi, quia bh:, ut diximus, æqualis est alicui ex ipsis bicuspidibus che:, bhe: Sed dimidium dictæ tricuspidis, ut duplum sit figuræ semicirculi, necesse est, veluti conspicitur, uti portionem, seu dicatur trilineum axh: æquale habeat figuræ illi, quæ, dum describitur illius arcus bx:, & ipsa describatur oportet supra cordam, vel subtensam arcui bh: semicirculi, figuræ, inquam, ba:, & hujusmodi trilineum (omisso eo, quod intra ipsam ba: quò licet modo divisum ultra quam totum collocabitur) est oculo etiam judice, minus ipsa ba: ergo sumpta altitudine minori, quam altitudo de:, nequibit dimidium tricuspidis duplum esse figuræ bh: semicirculi, atque adeo bicuspidis bhe:, sive che: Non alia ratione demonstrari potest, ducto arcu bz:, eo, quod trilineum fhz: evidenter majus est figura bf:, quod dimidium tricuspidis, si habeat majorem altitudinem altitudine de:, duplum esse non potest bicuspidis bhe:, vel che:, quare, quod dimidium tricuspidis, quod sit duplum che:, vel bhe:, illud sit necesse est, quod habens eandem, ac aliqua ex ipsis basim, habeat altitudinem ed: duplam altitudinis eh:, quæ eorundem altitudo communis est.

Constituto igitur hoc, quod id dimidium tricuspidis, cujus altitudo est recta ed:, sit æquale duplo bicuspidis che:, ideoque duplum sit figuræ bh: semicir-
cu-

go maggiore; e fatte nell' altro quadrante del cerchio le istesse cose, si tiri dalla parte dell' arco bd: a questo istesso arco bd:, con lo stesso intervallo, con cui si descrisse il semicircolo, infinitamente prossimo, per minimamente diminuire la altezza ed:, l' arco bx: sicchè adesso (perchè se non è al presente, neppure in caso di qualunque altra minore altezza) la metà della tricuspide, il di cui arco è bx: sarà doppia della bicuspide che:, ovvero bhe:, oppure doppia della figura bh: del semicircolo; perchè la bh: per il sopra detto, uguaglia una di esse bicuspidi che:, bhe:; Ma la metà della detta tricuspide per esser doppia della figura del semicircolo, è necessario, come si vede, che abbia la porzione, o trilineo axh: uguale a quella figura, che nel descriversi il di lei arco bx:, vien descritta essa pure sopra la corda, o sottesa all' arco bh: del semicircolo, cioè alla figura ba:, e questo trilineo (senza dire che diviso nel modo possibile, si potrà più che tutto in essa ba: ridescrivere) è a giudizio ancora degli occhi, minore di essa ba:, dunque con una altezza minore della de:, non potrà essere la metà della tricuspide doppia della figura bh: del semicircolo, e per conseguenza neppure della bicuspide bhe:, ovvero che: Così si prova nell' istesso modo, tirato l' arco bz:, perchè il trilineo fhz: è manifestamente maggiore della figura bf:, che la metà della tricuspide con una altezza maggiore della de:, non può esser doppia della bicuspide bhe:, oppure che: onde, che la metà della tricuspide, che sia la doppia della che:, ovvero bhe:, deve esser quella, che avendo la medesima base di alcuna di esse, abbia la altezza ed: dupla dell' altezza eh:, altezza comune ad esse.

Fig. 18.

Posto dunque ciò, che quella metà della tricuspide, la di cui altezza è la retta ed:, sia quella, che uguagli il doppio della bicuspide che:, e perciò il dop-

culi: oportebit, ut etiam æquale fit dimidiæ figuræ circuli eo, quod etiam dimidium figuræ circuli æquale fuit duplo figuræ femicirculi. Quam ob rem fi fimul duo dimidia ipfius fumantur tricufpidis, quorum arcus funt arcus b d: c d: erit tota tricufpis b d c e: æqualis integræ circuli figuræ, fupra quadrati latus b c: defcriptæ.

Fig. 19.

Quæ cum ita fint, defcribatur quocumque modo alter circulus, & in eodem infcribatur quadratum, defcriptâque fupra quodlibet ex lateribus ipfius quadrati, centrum verfus, figurâ illi æquali, quam a circulo idem latus fecat; altitudine duplâ altitudinis ipfius figuræ, perficiantur quattuor in quadrantibus circuli per arcus alterius circuli fubquadrupli, modo antecedenti, quattuor figuræ tricufpides, ex quibus una erit figura b e c h: infcripto præterea ipfo in circulo octagono regulari. Jam quia unaquæque ex defcriptis quatuor tricufpidibus figuris, fimilis antecedenti (in Fig. 18.) æqualis eft, uti oftenfum fuit, cuilibet ex figuris circularibus fupra latera quadrati infcripti in eodem circulo defcriptis: manifeftum eft, quod fi communiter fumantur duo invicem fibi obverfa, & æqualia trilinea, quatuor circulares figuræ, quæ funt fuper dicta latera infcripti quadrati, una cum duobus dictis trilineis, quod idem eft, ac fi dixeris totum quadratum infcriptum, æquales erunt quatuor tricufpidibus figuris, una cum iifdem trilineis fimul fumptis.

Quâ de caufsâ fi infcriptum quadratum æquale fit quatuor ipfis tricufpidibus figuris una cum duobus æqualibus, oppofitifque trilineis; evidentiffimum etiam eft, quod fi ab infcripto octagono auferatur vel infcriptum quadratum, vel quatuor memoratæ tricufpides figuræ una cum dictis trilineis, utroque modo trahun-

tur

pio della figura bh: del femicircolo, ne feguirà, che essa sia ancora eguale alla metà della figura del circolo: perchè anche la metà della figura del circolo uguagliava il doppio della figura del semicircolo. Onde se si prenderanno insieme le due metà di essa tricuspide, delle quali li archi, sono li archi bd:, cd:, sarà tutta la figura tricuspide bdce:, uguale a tutta la figura del circolo, descritta sopra il lato bc: del quadrato.

Il che essendo, si descriva in qualunque modo un altro circolo, ed in esso inscrivasi un quadrato, e descritta sopra ciascuno de i lati di esso quadrato verso il centro una figura eguale a quella, che esso lato sega dal circolo, con il doppio dell' altezza di essa figura si compiscano ne i quattro quadranti del cerchio, con archi di un altro circolo suqquadruplo, nell' antecedente maniera, quattro tricuspidi figure, delle quali sarà una la bech: inscrivendo di più in esso cerchio un ottagono regolare. Or perchè ciascuna delle quattro descritte tricuspidi figure, simile all' antecedente (nella Figura 18.) uguaglia, come si dimostrò, ciascuna delle figure circolari descritte sopra i lati del quadrato inscritto nell' istesso circolo; è manifesto, che essendo presi comunemente i due fra loro opposti, ed eguali trilinei, le quattro circolari figure, che sono sopra i lati del quadrato inscritto, insieme con i detti due trilinei, che è lo stesso, che dire, tutto lo inscritto quadrato, uguaglieranno le quattro tricuspidi figure insieme con i medesimi trilinei. Fig. 19.

Per il che se lo inscritto quadrato sia uguale ad esse quattro tricuspidi figure, più i due eguali, ed opposti trilinei; è ancor cosa chiarissima, che se dall' inscritto ottagono si tolga o il quadrato inscritto, o le quattro dette tricuspidi figure, più i detti trilinei, si vanno in qualunque modo sottrando eguali spazj: onde

 eziandío

tur æqualia ſpatia: unde reliqua etiam erunt inter ſe ſe æqualia. Atqui dempto quadrato relinquitur in octagono ſpatium rectilineum, & ablatis quatuor tricuſpidibus figuris, una cum duobus trilineis, relinquuntur octo æquales figuræ b fe: &c. quæ ſatis ſe ipſas exhibent videndas: ergò dictæ octo circulares figuræ æquales erunt ſpatio rectilineo; quod ſit exceſſus ejuſdem octagoni ſupra quadratum inſcriptum.

Ex his jam liquet, quod ſi arcus cujuslibet ex hujuſmodi figuris rationalis ſit, nil facilius eſt, quam quadratum conſtituere, quod ſit æquale circulo, cujus peripheriæ ipſe arcus nonnulla portio eſt; & ſi fingatur irrationalis eſſe, in poſtremâ ſequenti demonſtratione, quæ alioquin tota pendet ab iſtâ, quæque eo ſolum conſilio, ut clarior evaderet, ſegregata eſt, videbimus, an idem nihilo tamen minus peragi poſſit. Quod erat demonſtrandum &c.

DEMONSTRATIO IV.

Fig. 18. PRæter ea, quæ peracta fuerunt, ſubtendat recta c d: in (figur. 18.) arcum c d: Cum ex antecedentibus ſit bicuſpis c e d: dupla bicuſpidis c e h: neceſſe erit ob eadem ſuperius dicta, ut etiam trilineum una ex curva, ipſius portio, quod hic loci eſt trilineum m h d: æquale ſit figuræ, quæ ſupra cordam c h: ſemicirculi deſcribitur, dum arcus c d: deſcribendus eſt, ſcilicet figuræ c m: ita, ut ſi communi deinde modo, portio d m c: habens curvam d m: ſumatur, trilineum d h m: una cum dictâ portione d m c: triangulum videlicet rectangulum d h c: ſit æquale ipſi portioni d m c: una cum figurâ c m: ſumptæ, hoc eſt ſummatim integræ figuræ c m d:

Jam

eziandio i rimanenti fra loro saranno eguali. Ma detratto il quadrato, rimane nell' ottagono, uno spazio rettilineo, e detratte le quattro tricuspidi figure più i due trilinei, sono il rimanente le otto eguali figure bfe: ec. che ben si distinguono, dunque le dette otto circolari figure saranno eguali ad un spazio rettilineo, che sia l' eccesso del medesimo ottagono sopra il quadrato inscritto.

Si vede da questo, che se l' arco di una di queste figure sarà razionale, non è che cosa facilissima il costituire un quadrato eguale al circolo: della di cui periferia egli è qualche porzione; e supponendolo irrazionale, nella seguente ultima dimostrazione, che dipende per altro tutta da questa, e che solo per maggior chiarezza è separata, si vedrà se si possa ciò fare non ostante. Il che era ec.

DIMOSTRAZIONE IV.

SI sottenda oltre le antecedenti cose nella (figura 18.) all' arco cd: la retta cd: Essendo per il detto la bicuspide ced: doppia della celu: converrà per le medesime antecedenti cose, che anche il trilineo di una curva, parte di essa, che quì è il trilineo mhd: sia eguale alla figura, che si descrive sopra la corda ch: del semicircolo, nel descriversi l' arco cd: cioè alla figura cm: sicchè prendendosi poi comunemente la porzione dmc: di una curva dm: sia il trilineo dhm: insieme con la detta porzione dmc: cioè il triangolo rettangolo dhc: eguale alla istessa porzione dmc: presa insieme con la figura cm: cioè in somma a tutta la figura cmd:

Fig. 18.

Or

Jam hic loci, ut ut sit res, fingere volens, arcum istius figuræ c m d: irrationalem esse, experiundum, an liceat, uti dictum, rem nihilo tamen minus absolvere.

Fig. 20. Describatur itaque circulus, qui hujus subquadruplus sit, propterea quia talis circulus is est (ut ex superioribus liquet) cujus aliqua portio fuit figura æqualis triangulo; & permanente eodem centro, alter describatur descripti duplus, ductisque diametris, horizontali, & verticali, secetur a circulo minori, incipiendo ab uno ex ejus horizontalis diametri extremis, figura jam reperta æqualis triangulo, quæ esto figura a i k:, & per punctum k: alterum ipsius figuræ extremum transeat radius d e:, erit ergo tota portio a d k: minoris circuli (vel portio rotæ, quæ adæquat dictam a d k:) æqualis triangulo, quod æquale sit triangulo a d k: una cum triangulo, æquante figuram a i k:, sed sumatur portio a d k:

Et quoniam triangulum rectangulum, cui esset alterum latus æquale periphæriæ alicujus circuli, & alterum, quod circa rectum angulum pariter sit, æquale ipsius radio, æquale foret illi circulo, aptetur triangulum, æquale triangulo, quod totam æquat portionem a d k:, radio circuli minoris descripti, ita, ut idem radius unum ex ipsius lateribus circa angulum rectum sit; opus erit, ut alterum trianguli latus, quod circa rectum angulum pariter est, æquale sit arcui portionis a d k: eo, quod idem æquale esset totius circuli periphæriæ, aut dimidiæ, aut cuilibet alteri illius parti, si triangulum aptatum æquale foret toti circulo, aut dimidiæ, aut cuilibet alteri ipsius parti: uti & noveris.

Quam

Or quì ſupponendo, comunque ſiaſi, che l'arco di queſta figura ſia irrazionale, ſi veda, ſe non oſtante ſi poſſa condurre a fine l'intento.

Si deſcriva pertanto un circolo ſuqquadruplo del preſente, mentre un tal circolo è quello, come ſi oſſervò, di cui qualche porzione fu la figura eguale al triangolo, e con lo iſteſſo centro ſe ne deſcriva un altro doppio del deſcritto, e condotti i diametri orizontale, e verticale, ſi ſeghi dal minore, cominciando la ſezione da una eſtremità del di lui diametro orizontale, la iſteſſa figura già ritrovata eguale al triangolo, che ſia la figura aik: e per il punto k altra delle eſtremità di eſſa figura paſſi il raggio de:, ſarà dunque tutta la porzione adk del circolo minore (oppure la porzione della ruota, che è eguale ad eſſa adk:) eguale ad un triangolo, che uguagli il triangolo adk: con inſieme il triangolo eguale alla figura aik: Ma ſi prenda la porzione adk:

Fig. 20.

E perchè un triangolo rettangolo, che aveſſe un lato eguale alla periferia di un circolo, e l'altro, che ſia d'intorno anche eſſo all'angolo retto, eguale al raggio di eſſo circolo, ſarebbe uguale a quel circolo: ſi adatti un triangolo, che ſia uguale al triangolo, che uguaglia tutta la porzione adk al raggio del deſcritto circolo minore così, che eſſo raggio ſia uno de i di lui lati d'intorno all'angolo retto; ne ſeguirà, che l'altro lato del triangolo d'intorno anche eſſo all'angolo retto, ſia uguale all'arco della porzione adk: perchè eſſo ſarebbe uguale a tutta la periferia del circolo, o alla metà, o a qualunque altra di lui parte, ſe il triangolo adattato foſſe uguale a tutto il circolo, o alla metà, o a qualunque altra di lui parte: come è noto.

Sicchè

Quam ob rem habebimus jam lineam rectam æqualem periphæriæ, vel arcui ak: minoris circuli: unde si quemadmodum arcus ak: se habet ad arcum nk: sui ipsius partem, ita fuerit recta æqualis arcui ak: ad alteram rectam: altera illa recta, quarta scilicet proportionalis, æqualis esse debebit arcui nk:, unde sicuti arcus ak:, dempto arcu nk:, æqualis esset arcui an:, qui quarta pars est periphæriæ dicti circuli, ita recta æqualis arcui ak:, demptâ illâ rectâ æquali arcui nk:, æqualis foret ipsi quartæ parti an:, periphæriæ ipsius circuli.

Sed, amabo, designetur recta linea, quæ æqualis sit arcui nk:, manifesta res est, hanc rectam eam esse debere, quæ erit ad rectam æqualem arcui ak:, uti angulus ndk:, cui opponitur arcus nk:, ad angulum adk:, cui opponitur arcus ak:, unde si nota sit ratio anguli ndk: ad angulum adk:, nullius quoque laboris erit inventio rectæ æqualis arcui nk:

Fig. 21. Posito igitur eodem circulo, iisdemque in ipso rebus, producatur diametros ipsius horizontalis, & ex puncto k. ductâ rectâ km:, secetur ab ipsâ diametros eo modo, ut portio mg: ipsius rectæ, quæ sita est inter productam diametrum, & convexam circuli periphæriam, æqualis sit radio ipsius circuli, & centro facto in m:, concursus puncto, secetur ab rectâ km: recta me: æqualis productæ semidiametro md:, erit triangulum mde: isoscelium triangulum, cujus, cum habeat angulos æqualibus oppositos lateribus inter se se æquales, verticalis angulus m:, ab iisdem æqualibus contentus lateribus, juxta notissimum theorema, æqualis erit tertiæ parti anguli adk: Quare si haberi poterit quantitas cujusvis ex angulis hujusmodi trianguli, eo, quod tum cognita erit etiam reliquorum quantitas (vel habeatur aliqua alia quantitas angulorum, qui extra triangulum

Sicchè saravvi adesso una linea retta eguale alla periferia, o arco a k: del circolo minore, per il che, se come l' arco a k: sta all' arco n k:, porzione di lui, così starà la retta eguale all' arco a k: ad un' altra retta; l' altra, cioè la quarta proporzionale, dovrà essere eguale all' arco n k:, onde come l' arco a k: meno l' arco n k: uguaglia l' arco a n:, che è la quarta parte della periferia del detto circolo, così la retta eguale all' arco a k:, meno quella retta, eguale all' arco n k:, uguaglierà la istessa quarta parte a n: della periferia dell' istesso circolo.

Ma si assegni la retta linea, che uguagli l' arco n k:, è manifesto, questa retta dovere esser quella, che starà alla retta uguale all' arco a k:, come l' angolo n d k:, a cui è opposto l' arco n k:, all' angolo a d k:, a cui è opposto l' arco a k:, onde se sarà nota la ragione dell' angolo n d k: all' angolo a d k:, sarà facile ritrovare ancora la retta uguale all' arco n k:

Posto dunque lo stesso circolo, e le istesse cose, si prolunghi il diametro orizontale di esso, e dal punto k: condotta la retta k m: sia segato da essa in modo, che la porzione m g: di essa retta, che resta fra il diametro prodotto, e la convessa periferia del circolo, sia eguale al raggio di esso circolo, e fatto centro in m: punto del concorso, si seghi dalla retta k m: la m e: uguale al prolungato semidiametro m d:, sarà il triangolo m d e: un isoscele triangolo, che avendo li angoli, opposti alli eguali lati, eguali fra loro, averà l' angolo verticale m:, contenuto da i detti lati, eguale per un notissimo teorema, alla terza parte dell' angolo a d k: Per il che se si potrà avere la quantità di qualunque delli angoli di questo triangolo, perchè allor sarà nota quella de i rimanenti ancora (o sia la quantità di altri angoli, che siano fuori di esso trian- Fig. 21.

 golo)

angulum ipsum sint) satis patet, repertam quoque tum fore quantitatem anguli n d k:, quæ nunc perquiritur. Sed hæc omnia ad reperiendam anguli n d k: quantitatem nullius sint pretii.

Fig. 12. Et describatur circulus, & in ipsius quartâ parte descripto triangulo isoscelio rectangulo, e a c:, producatur in indefinitum ipsius horizontale latus, & ad extremitatem c: alterius verticalis lateris ductâ perpendiculari c x:, ab ipsâ eadem extremitate cadant indefinitæ rectæ productum latus a e: secantes, ita tamen, ut quælibet recta cadens, ab eodem (hic loci usque in b:) producto latere semper dividat portionem æqualem basi antecedentis deinceps cujusque trianguli, initâ segmenti ratione duntaxat usque ad id punctum, ad quod decidet recta, quæ ipsius antecedentis trianguli basis est: videlicet veluti recta c f: secat lineam f e:, æqualem rectæ c e:, ita recta c g: secet lineam g f:, æqualem rectæ c f:, & ita semper.

Liquet ex his, quod rectæ lineæ indefinitæ poterit quis infinita aptare isoscelia triangula, & quod cujuslibet ex ipsis angulus ad verticem c:, notus esse debebit, eo, quod cognitus sit primus externus, & rectus c a d: unde necesse erit, ut cognitus etiam sit deinde reliquus ille angulus a perpendiculari c x:, & proximiori illi rectâ, a vertice c: ad productum cadente latus, contentus, qualis qualis illius parva quantitas sit, idest angulus complementi anguli recti.

Quam ob rem cum hujusmodi angulus mathematico modo ab asymptotis in infinitum possit deinceps minui, cadant ex vertice c: ad productum latus tot rectæ, quot opus sunt, usque dum ipse angulus relinquatur tantus, ut communis esse queat mensura inter angulum n d k:, cujus quantitas pervestigatur, & angulum

golo) si vede, che sarà ritrovata eziandio la quantità dell' angolo n d k:, di cui ora si và in traccia. Ma tutto ciò non basti per ritrovare la quantità dell' angolo n d k:

E si descriva un circolo, e in un quadrante di esso descritto il triangolo e a c: isoscele rettangolo, si prolunghi indefinitamente il lato di esso orizontale, e alla estremità c: dell' altro lato verticale tirata la perpendicolare c x:, cadano da essa medesima estremità rette indefinite, che seghino il prodotto lato a e:, in maniera però, che ciascuna retta cadente seghi dal detto lato (quì prodotto fino in b:) sempre una porzióne, uguale alla base dell' antecedente di mano in mano triangolo, computandosi il segmento solo fino al punto, in cui caderà la retta, che è base di esso triangolo antecedente: voglio dire, che come la c f: sega la f e:, uguale alla c e:, così la c g: seghi la g f:, uguale alla c f: e così sempre. Fig. 22.

E' manifesto da ciò, che alla retta indefinita si potranno adattare infiniti triangoli isosceli, e che ciascuno di essi avrà l' angolo al vertice c:, che dovrà esser noto: perchè è noto il primo esterno, e retto c a d:, onde dovrà poi esser noto ancora quell' angolo rimanente, che sarà contenuto dalla perpendicolare c x:, e la più prossima a lei retta, dal vertice c: cadente al prodotto lato, per quanto picciolo siasi, cioè l' angolo del complemento del retto.

Per il che potendosi un tale angolo matematicamente, e successivamente dalle asintoti in infinito impiccolire, cadano dal vertice c: al prodotto lato tante rette, quante ve ne bisognano, finchè esso angolo resti tanto, che possa essere la comune misura fra l' angolo n d k:, di cui la quantità si cerca, ed un angolo retto.

 E certo,

lum rectum. In dubia res eſt, ſit quantumvis parva licet communis illa menſura, quæ inter angulum n d k:, & angulum rectum intereſſe debet, quod hujuſmodi arte certe poterit inveniri. Intereſſe, dixi, debet, eò, quod ſi res benè perpendatur, quantitates homogeneæ revera inter ſe ſe incommenſurabiles nullæ exiſtunt, niſi eo, quia difficillimum, ne dixerim impoſſibile quandòque ſit, ſuam propter nimiam exilitatem, veluti latus inter, & quadrati diametrum, illam reperire communem menſuram, quæ tamen deeſſe non poteſt (uti etiam ex addita hic quadam propoſitione elicere fas erit) ſi animo volvatur, quod eædem ſemper inter ſe oportet, ut ſint primæ illæ phyſicæ particulæ (qualeſcumque illæ fuerint) quæ lineas componunt &c.

Sed quovis modo cognito tandem angulo n d k: (quemadmodum abſque linearum tumultu, & confuſione vel poſtremâ hac arte per communem menſuram fieri poſſet) & quia reliquus angulus, angulus rectus eſt, cognito etiam toto angulo a d k:, erit ergo reperta etiam recta linea æqualis arcui n k:, eo, quod opus eſſe, ut illa ſit, quæ erit ad rectam, quæ æqualis fuit arcui a k:, uti angulus n d k: ad angulum a d k:, ſuperius dictum eſt.

Nunc vero hæc æqualis arcui n k: recta trahatur ex rectâ æquali arcui a k:, erit recta æqualis arcui a k: demptâ rectâ æquali arcui n k:, æqualis, prout dictum eſt, parti quartæ n a: periphæriæ circuli. Quare quadruplicata erit æqualis toti ipſius periphæriæ: ex quo ſtatim emergeret haud dubia, quam habet diametros alicujus circuli ad integram ejus perimetrum, rationis cognitio, atque adeo conſtitui poſſe quadratum ipſi circulo æquale, nec non ſolidum rectilineum æquale ſphæræ, & cono, & quadratum æquale ellipſi, quam laudatus Archimedes mediam proportionalem inter duos

cir-

E certo, che per quanto possa essere mai picciola quella comune misura, che esser deve fra l' angolo n d k:, ed un angolo retto, in questa guisa si potrà sicuramente ritrovare. Dissi esser deve, perchè, se si consideri, non si danno veramente quantità omogenee fra loro incommensurabili, se non perchè riesce a noi difficilissimo, per non dire ancora impossibile, il ritrovare per la sua tal volta grandissima picciolezza, come fra il lato, e il diametro di un quadrato, quella comune misura, che pure non può mancare (come ancora da una proposizione quì annessa si potrà vedere) se riflettasi, che devono essere fra loro sempre le medesime (quali mai elle si siano nella minima loro quantità) le prime fisiche componenti particelle delle linee ec.

Ma in qualsivoglia maniera (come riuscirebbe senza tumulto, e confusione di linee anche nell' ultimo modo, ritrovando la comune detta misura) finalmente conosciuto l' angolo n d k:, e perchè il rimanente è un angolo retto, reso noto eziandio tutto l' angolo a d k:, sarà dunque ritrovata ancora la retta eguale all' arco n k:, mentre si disse, dovere esser quella, che starà alla retta, che fu uguale all' arco a k:, come l' angolo n d k: all' angolo a d k:

Si sottri adesso questa retta uguale all' arco n k:, dalla retta eguale all' arco a k:, sarà la retta uguale all' arco a k:, meno la retta eguale all' arco n k: uguale, come fu detto, alla quarta parte n a: della periferia del circolo. Sicchè quadruplicata, sarà uguale all' intiera periferia di esso; dal che ne seguirebbe tosto una cognizione sicura della ragione del diametro alla periferia del suo circolo, e potersi per conseguenza costituire un quadrato eguale ad esso, siccome un solido rettilineo eguale ad una sfera, e cono, ed un quadrato uguale all' elliffe, quale dimostra il laudato Archime-

de

circulos, alterum ſuper illius majori diametro, & alterum ſuper minori deſcriptum eſſe demonſtrat: & tandem complura alia, quæ hic, ne prolixa oratio tædium afferat, prætermitti ſatius eſt.

Sed cum jam eò perventum ſit, ut in medium aliquid etiam de ratione diametri ad ſui circuli periphæriam afferatur res ipſa poſtulet: id contendere auſim, quod haud parvo impenſo ſtudio, & labore, nactus ſum, radium ad dimidiam ſui circuli periphæriam ſe ſe habere, ſicut numerus 5325: ad numerum 17152: unde ſic diametros ad circumferentiam.

Quæ ratio, quatenus ipſe eam inire, & ſubducere quiverim, minor eſt quam illa Archimedea 7: ad 22: fere ob duos trientes unius ſeptimi, vel $\frac{2}{3}$: di $\frac{1}{7}$: ſed hæc omnia, quæ etiam plurimum ab rectiſſimo, ſed moleſto nimis opere manuum pendent, poteſt (ſi cui non gravis hujuſcemodi labor) quilibet repetere. Id quod erat &c.

PROPOSITIO.

CUM Geometria, fida veri comes, nullum excipiat hoſpitio dubium, nullamque admittat propoſitionem, quam ſua demonſtratio, veluti umbra corpus non ſequatur, & ipſe dixerim in anteactis non exiſtere, ſi vera fateri fas eſt, homogeneas quantitates (de extenſis, aut de iis quantitatibus quæ quid ſpatii mundano in ſpatio obtinere poſſunt locutus) quæ inter ſe ſe ſint incommenſurabiles, niſi eo de nomine, quod humani intellectus imbecillis viribus difficillimum ſit communem ipſis perveſtigare menſuram, nimis fortaſſe exilem, parvamque, (quando incommenſurabilitas apud omnes non ſic audiret) oportet me de dicto per tranſennam rationem aliquam

quam

de essere mezzana proporzionale fra due circoli, uno descritto sopra il di lei diametro maggiore, e l'altro sopra il minore, e finalmente molto altro, che quì non starò a dire per non tediare.

Essendo ormai tempo di dir qualche cosa ancora della ragione, che ha il diametro alla periferia del suo circolo, posso dire, che dopo grandissima diligenza, e non ordinaria fatica ho ritrovato, che il raggio sta alla metà della periferia del suo circolo, come 5325: a 17152: onde così il diametro alla circonferenza.

Qual ragione, per quanto abbia io potuto osservare è minore della ragione di 7: a 22: secondo Archimede intorno a due terzi di un settimo, o pure $\frac{2}{3}$: di $\frac{1}{7}$: Ma tutto ciò, che moltissimo dipende dalla puntualità delle necessarie, e tediose operazioni, potrà chiunque dilettisi di tal fatica, meglio riscontrare. Il che era finalmente ec.

PROPOSIZIONE.

NON alloggiando la Geometria in sua veritiera abitazione alcun dubbio, nè veruna proposizione, che se pure ne abbisogni, non sia, come dall' ombra il corpo, dalla sua dimostrazione seguita, ed avendo io per lo passato detto, che non si danno veramente quantità omogenee (intendendo quantità estense, oppure che possono occupare un qualche spazio nello spazio reale del Mondo) che siano fra di loro incommensurabili, se non perchè riesca alla potenza debole dell' umano intendimento difficilissimo il ritrovare una loro comune misura per la grandissima picciolezza della medesima (quando così l'incommensurabilità non s' intendesse da tutti)

mi

quam reddere. Dico igitur, quod quadrati cujuſpiam diametros commenſurabilis tum potentiâ, tum etiam longitudine eſt ejuſdem rationali, ſivè dixeris, cognitæ lateri quantitatis.

Fig. 23. Tab. VII. Nam eſto recta cb: latus inſcripti in circulo quadrati, erit recta ci: quæ diametros eſt circuli, etiam diametros ipſiuſmet quadrati. Quare ſi ci: incommenſurabilis ſit lateri cb: fiet hoc ob aliquam ſuam irrationalem partem (Sic ſi quadratum ex cb: foret 25: cum eſſe debeat quadratum ex ci: duplum ipſius, ideſt 50: pars, ob quam ci: incommenſurabilis longitudine fertur lateri cb: ſurda illa quantitas eſſet, quæ tanto minor eſt $\frac{1}{14}$: quanto opus eſt, ut multiplicatio in ſemet ex 7: $+\frac{1}{14}$: quotientem exhibeat $\frac{1}{196}$: minorem) Eſto igitur ejus pars irrationalis illa reliqua illius pars ei: & ut ce: ad quandam em: quæ rationales ponantur, ita fiat em: ad aliquam tertiam en: quæ etiam rationalis eſſe debebit: dico, ut etiam reliqua ei: rationalis ſit, neceſſe eſſe. Nam eſto, licèt, irrationalis: quæritur quid de cæterâ in: rationalis ſit, nec ne? ſi dicatur rationalis eſſe, ergo recta en: partim nota, partim incognita erit, contraquam ſtatutum eſt; vel cum debeat tota noſci, ſi cognita erit pars in: nota erit etiam reliqua pars ei: ſi irrationalis: ergo cum ignota ſit etiam ei: erit tota en: irrationalis, quod repugnat hypotheſi, in quâ menſuram en: notam eſſe voluimus. Quare cum nihil de recta in:, ut ut velis, proferre in medium queas, quod a ſuperiori poſitione non abhorreat, niſi ponatur etiam recta ei: rationalis, opus erit, ut, ſi recta ei: commenſurabilis longitudine ſit aliis inter ſe commenſurabilibus rectis, eo, quo voluimus, collineemus.

Etiam

mi conviene brevemente dimostrarlo. Dico pertanto, che il diametro di un quadrato è commensurabile non solo in potenza, ma ancora in longitudine al di lui razionale, o dicasi cognito lato.

Atteso che sia la retta bc: il lato del quadrato inscritto nel circolo, sarà il diametro ci: del circolo. il diametro di esso. Sicchè se ci: è incommensurabile in longitudine al lato cb: ciò lo sarà, perchè qualche parte di ci: non è razionale (Così se il quadrato di cb: fosse 25: dovendo essere il quadrato di ci: doppio di esso, cioè 50:, la parte, per cui ci: si dice incommensurabile al lato cb: sarebbe quella quantità sorda, che è tanto minore di $\frac{1}{14}$: quanto è necessario, perchè la moltiplicazione in se stessi di $7. + \frac{1}{14}$: dia un prodotto minore di $\frac{1}{196}$:) sia però questa parte di lui incognita la rimanente ei: e si faccia come ce: ad em: quali si pongano note, così em: ad una terza en:, che pure dovrà essere di nota misura: dico, che ancora la rimanente ei: deve essere razionale. Imperocchè non sia: si cerca, che sarà della di lei rimanente in: se sarà razionale, o irrazionale. Se si dica il primo: dunque la retta en: parte sarà nota, e parte incognita, contro la posizione di dovere essere conosciuta tutta; oppure dovendo essere tutta nota, se sarà nota la parte in: sarà nota ancora la rimanente ei: Se si voglia il secondo: dunque essendo conosciuta ancora la ei: sarà tutta en: irrazionale, contro l' ipotesi di dovere la en: essere intieramente nota. Sicchè non potendo in verun modo dirsi alcuna cosa della in: che concordi con la posizione superiore, se non si pone razionale ancora la ei: ne seguirà, che dovendo la ei: essere commensurabile in longitudine alle altre fra loro commensurabili rette,

Fig. 23. Tab. VII.

Etiam per gravium acceleratum motum, cum qui noſſe poſſit ex motus, viriumque ſcientiâ, quod tempus per inclinatum planum bc: ad tempus per ejus perpendiculum ba: (quorum temporum aliquis motus communis eſſe menſura quiret) eſt, ut eadem recta bc: ad ba: (vel fuerit quocumque alio modo (& quod tempus per bc: æquale eſt tempori per diametrum circuli bd:, luculente probaretur commenſurabilitas diametri bc: lateri ſui quadrati ba: eo, quod ut ſe haberet ab decidente gravi impenſum tempus per diametrum bd: ad tempus inſumptum per ba: ita foret bc: ad ba: Unde inter quantitates incommenſurabilitas (non ſecus ac inter duorum littorum arenæ granulorum quantitatem incomparabilitas) ex rei difficultate, non ex veritate originem trahere dicenda eſt. Quod erat &c.

APPENDIX

Aliquarum ex curvilineis vel mistilineis figuris, quæ aliis rectilineis regularibus figuris æquales repertæ fuere.

UT paucæ, quæ ſequuntur figuræ, compluresque aliæ, quæ componi ſimili modo poſſent, rectè intelligantur, prima adeò neceſſaria eſt, ut ex varia illius partium compoſitione, cæteras ferè omnes pendere dicendum ſit. Quod ſi cui illas ſcrutari non libitum, pergat.

Fig. 24. Tab. VII. Prima itaque figura, in qua tres reperiuntur circuli, alter alterius continua proportione duplus, quâ in ratione erunt ſemper omnes circuli in omnibus, quæ hanc conſequuntur, figuris, ejuſmodi eſt, ut tota demptis

sia il diametro ci: commensurabile al lato cb: come si voleva ec.

Ancora per mezzo del moto accelerato de i gravi, insegnando la scienza delle forze, e moto, che il tempo per il piano inclinato bc: al tempo per il perpendicolo ba: (de i quali tempi esser potrebbe la comune misura un qualche movimento) sta come bc: a ba: (o stesse in qualunque altro modo) e che il tempo per bc: uguaglia il tempo per il diametro bd: del circolo; si proverebbe bastantemente la commensurabilità del diametro bc: al lato del suo quadrato ba: perchè come il tempo, che il cadente grave spenderebbe per bd: al tempo, che impiegherebbe per ba: così sarebbe bc: a ba: Onde l' incommensurabilità fra le quantità (appunto come l'incomparabilità tra la moltitudine de i granelli di arena di due lidi) dovrà dirsi, che riconosce l' origine dalla difficoltà, non dalla verità della cosa. Il che era ec.

APPENDICE

Di alcune delle curvilinee, o mistilinee figure, ritrovate eguali ad altre figure rettilinee regolari.

ALl' intelligenza delle poche seguenti figure, e di molte altre, che potrebbero similmente comporsi, la prima è così necessaria, che dalla varia disposizione delle di lei parti si può dire, che quasi tutte dipendano. Ma se ad alcuno non piacesse il trattenersi, può tralasciarle.

La prima figura pertanto, in cui sono tre circoli in doppia ragione continuamente fra loro, in qual ragione saranno sempre i circoli ancora nelle seguenti figure, e tale, che tutta, meno le sei figure, descritte due

Fig. 24. Tab. VII.

ptis ſex figuris, deſcriptis ſingulis quibuſque duabus ex adverſo, ſupra unumquodque ex tribus lateribus a b: b c: c d: hexagoni regularis in circulo majori inſcripti, æqualis ſit ipſi hexagono: & ob hoc æqualis ſit quadruplo hexagoni ſimilis in circulo minore A: deſcripti. Id quod per ſe ſatis patet, nam ab quocumque circulo quocumque modo tollantur ſex figuræ ex iis, quas ab ipſo ſecant latera regularis inſcripti hexagoni: cum ſemper ab æqualibus æqualia ſic demantur, quodcumque relinquitur æquale ſemper erit ipſi hexagono; unde æquale etiam erit quadruplo figuræ ſimilis, vel hexagoni inſcripti in altero ſubquadruplo circulo. Inſuper ſi hic loci ſumatur quælibet rota, dum ſingulæ quæque rotæ dimidia circuli, quem componunt, pars ſunt, ſed ab ipsâ ablatis tribus ex iiſdem ſuperius dictis, quæ ſunt in eadem rota, figuris, dimidium illa erit hexagoni inſcripti in ipſo circulo, cujus pars eſt: quod quia facile cognitu, majori non indigere videtur probatione.

Fig. 25. Secunda figura conſtat ex unâ tantum rotâ, quæ demptis quattuor figuris ex illis, quas ſecant ab ipsâ octagoni regularis inſcripti in circulo, cujus eſt pars, latera, æqualis eſt octagono in ſequenti circulo deſcripto, eo, quod ipsâ rotâ circulum æquante ſequentem, quattuor ipſius ſuperius dictæ figuræ, æquales ſunt octo ejuſdem circuli ſimilibus figuris: unde &c.

Fig. 26. Figura hæc, dempto circulo A:, æqualis eſt duplo hexagoni inſcripti in eodem circulo A:, & hæc omnia ex antecedentibus manifeſta erunt ſatis.

Fig. 27. Tota hæc figura, demptis duabus ſemifiguris a:, & b:, æqualis eſt duplo hexagoni unacum dimidio quadrato in integro circulo A: cujus dimidium eſt D: deſcripto, eo, quia cum adſit dimidium B:, quadrati, quod

ordinis

due per due oppostamente sopra ciascuno dei tre lati ab: bc: cd: del sessagono regolare inscritto nel circolo maggiore, uguaglia l'istesso sessagono, e perciò il quadruplo del sessagono simile descritto nel circolo minore A: Il che è chiarissimo, perchè da qualunque circolo in qualunque modo si sottrino sei figure di quelle, che da esso segano i lati dell' inscritto regolare sessagono, sottrandosi così sempre l' eguale dall' eguale, il rimanente uguaglierà sempre lo stesso sessagono: onde uguaglierà ancora il quadruplo della figura simile, o sessagono inscritto in un altro circolo suqquadruplo. Inoltre prendendosi quì qualunque ruota, mentre ciascuna è la metà del circolo, che ella compone, ma meno sole tre delle sopraddette figure, che sono nell' istessa ruota, sarà ella la metà del sessagono inscritto nel circolo, di cui ella è parte, come senza maggior prova si vede.

La seconda figura costa di una sola ruota, quale meno quattro figure di quelle, che segano da essa i lati dell' ottagono regolare, inscritto nel circolo, di cui ella è parte, eguaglia l' ottagono inscritto nel circolo seguente; perchè essa ruota uguagliando il circolo seguente, le quattro dette figure, che sono in essa, ne uguagliano otto simili del medesimo: onde ec. Fig. 25.

Questa figura meno il circolo A: uguaglia il doppio del sessagono inscritto nello stesso circolo A: e tutto ciò sarà per le antecedenti chiaro bastantemente. Fig. 26.

Tutta questa figura meno le due semifigure a:, b: uguaglia il duplo del sessagono, più la metà del quadrato descritto nel compito circolo A:, perchè essendovi la metà B: di un quadrato, che dissi un quadrato Fig. 27.

dell'

ordinis secundi quadratum appellavi, reliqua omnia facile ab antecedentibus expromentur.

Fig. 28. Ejusmodi figura, ablatis quatuor figuris a: b: c: d:, æqualis tota est duplo quadrati, unacum hexagono, ipso quoque in circulo B: descripto, & ab antecedenti tertiâ proficiscitur: cum recta g f:, & duæ in circulo B: cordæ, sint latera hexagoni, in earum uniuscujusque descripti circulo.

Fig. 29. Tab. VIII. Figura ista procedit tota a figurâ primâ, & æqualis est hexagono descripto in duplo semicirculi c:

Fig. 30. Hæc quoque oritur a primâ, & est dupla antecedentis proximæ figuræ.

Fig. 31. In præsenti, & postremâ figura, rota major tota, sed demptis ab ipsâ quatuor figuris a: b: c: d: àb ea defectis per quatuor latera octagoni regularis in circulo, cujus pars est, descripti, æqualis est, uti superius quoque, octagono inscripto in sequenti intermedio circulo sibi æquali, ideòque inscripto in eodem circulo, circumscriptoque quadrato, erit proportionalis media inter eadem quadrata: id quod ex theoremate oriundum jam notissimo, longiorem videtur non exigere sermonem. Quod &c.

DE PROBLEMATE DELIACO.

QUis ignorat, eâ cubicâ ara, quam veluti suarum Delij calamitatum finem respiciebant, si duplicare potis fuissent, ita illos excruciatos, sed casso semper labore, ut desperata omnino re, tandem ab Platonis sagacitate quid consilii capere constituerint: & consilium me-

dell' ordine secondo, il resto con facilità dalle antecedenti si potrà dedurre.

Questa figura meno le quattro figure a: b: c: d: uguaglia tutta il duplo del quadrato, più il sessagono inscritto anche esso nel circolo B:, e dipende dalla antecedente terza, essendo la retta g f:, e le due corde del circolo B:, lati del sessagono del suo circolo. Fig. 28.

La presente figura dipende tutta dalla prima, ed uguaglia un sessagono descritto nel doppio del semicircolo c: Fig. 29. Tab. VIII.

Questa pure nasce dalla prima, ed è la doppia della prossima antecedente. Fig. 30.

In questa ultima figura, tutta la ruota maggiore, ma meno le quattro figure a: b: c: d: segate da essa da quattro lati dell' ottagono regolare, inscritto nel circolo, di cui ella è parte, uguaglia, come antecedentemente, l' ottagono inscritto nel seguente, ad essa uguale circolo di mezzo, e però inscritto in esso circolo, e circonscritto un quadrato, sarà la media proporzionale fra essi quadrati, come per un teorema, che devesi supporre a ciascuno ormai notissimo, e manifesto. Il che ec. Fig. 31.

DEL PROBLEMA DELIACO.

E Chi non sa, che quel cubico altare riguardato dalli abitatori di Delo, come fine delle loro calamità, se l' avessero duplicato, affannò di tal modo, ma sempre indarno i medesimi, che perduta ogni speranza, risolverono finalmente di prenderne dalla sagacità

mehercules haud indignum Platone fuiſſe, ut Delij, ſumptâ unius ex ejuſdem aræ lateribus longitudine, primum illam duplicarent, indeque inter longitudinem, ipſiuſque longitudinis duplum, duas perveſtigarent medias proportionales ita, ut in continua proportione earum quarta linearum primæ dupla eſſet: ſi enim tum, cum aræ latus erat prima, ſimilem aram ſupra ſecundam conſtruxiſſent, intricatiſſimum oraculi problema bonis alitibus expeditum eſſet: & tandem, licet facile fides fiat immenſi a Deliis in exquirendis duabus mediis proportionalibus exantlati laboris: nihilo tamen minus ſemper laterem lavantes, poſt longæ tædium inquiſitionis, conſilium quid impoſſibile ſecum ipſis reputantes, infectam rem dolenter reliquiſſe?

Sed impoſſibile porrò conſilium Platonis non erat: nam ſi forte animis non deficientes ſequentem quoque modum arripuiſſent (vereor enim, ne alios geometricis omnino legibus non addictos oraculum reſpuiſſet) & ne latum quidem unguem ab his, de quibus docti a Platone fuerant, diſceſſiſſent, compotes profectò voti ſui Delii fuiſſent facti.

Fig. 32. Tab. VIII. Etenim deſcribantur duo æquales circuli x: & z: ſed ita, ut eorum periphæriæ viciſſim tranſeant per centra, ductiſque eorum horizontalibus diametris, quæ in eadem erunt rectâ lineâ, a peripheriâ circuli z: decidat ad punctum d:, quod eſt in diametro ipſius ab:, perpendicularis cd: (punctum d: nactus ſum, oportere, ut ſit, ex iis æqualibus partibus, in quarum octo tota diametros ab: dividetur, terminus quintæ) & ab extremo c: ipſius perpendicularis cd: ducantur ad extrema ipſius diametri ab: duæ rectæ lineæ cb:, ca:, ex

quibus

tà di Platone qualche configlio : e che fu queſto molto degno della perſona di Platone : che i Delj preſa la longitudine di uno de i lati del medeſimo altare, aveſſero queſta primieramente duplicata, e dipoi fra detta longitudine, ed il duplo di eſſa, aveſſero ritrovate due medie proporzionali così, che eſſendo continua la proporzione, la quarta foſſe doppia della prima; perchè eſſendo un lato dell'altare la prima, ſe ne aveſſero drizzato un ſimile ſopra la ſeconda, certamente avrebbero, come è ben noto, non con ſiniſtra fatica, diſciolto così dell' Oracolo l' intricato problema : e che finalmente ſebbene ſi può credere qual foſſe mai l' aſſidua applicazione de i Delj a ricercare le medie due proporzionali fra le date due, e con le date condizioni da Platone: con tutto ciò non vedendone eſſi alcun profitto, dopo molto ſudore, riputando il configlio un' impoſſibile, abbandonarono dolentemente l' impreſa ?

Ma non era già impoſſibile di Platone il configlio, perchè ſe, non perduto il coraggio, anche del ſeguente mezzo (mentre di qualunque altro a geometrica legge non obbligato, non ſo ſe contento, e pago ſi ſarebbe detto l' Oracolo) per ritrovare le ſopraddette proporzionali ſi foſſero alla fine ſerviti, avrebbero ſenza dubbio (ciò che eſſi deſideravano) duplicato l'altare.

Imperocchè ſi deſcrivano due uguali circoli x: e z: ma in modo, che le di loro periferie paſſino ſcambievolmente per i loro centri, e tirati i di loro diametri orizontali, che ſaranno per diritto, cada dalla periferia del circolo z: al punto d: del di lui diametro a b: la perpendicolare c d: (il punto d: ritrovo dovere eſſere il termine della quinta parte di quelle uguali, delle quali tutto il diametro a b: ſarà otto) e dalla eſtremità c: di eſſa perpendicolare c d: ſiano condotte a i termini dell' iſteſſo diametro a b: due rette c b:, c a:, delle quali la

Fig. 32. Tab. VIII.

quibus ca: fit alterius nunc defcribendi circuli diametros, fitque per rectam fd:, ductam ab illius periphæriâ ad fixum punctum d:, secta ad angulos rectos ; cadentibus demum ex puncto f: extremo fd: ad extremitates diametri ca: rectis lineis fc: fa:

Dico, fi animo nunc fingas, quod cubica illa ara erecta effet fuper latus ag:, radium circulis x:, & z: communem, & Delii aliam fimilem aram fuper latus af: conftituiffent, quod hæc ara fupra rectam af: conftituta, ea fuiffet, quam verfatiffimum imperaverat oraculum, fcilicet cubus af: duplus fuiffet cubi ag:

Namque cum in primis anguli adc:, cfa: recti fint, alter ob perpendicularem cd: diametro ab: alter, quod pofitus fuerit in femicirculo, tranfibit ergo circulus minor per quattuor puncta a: d: c: f:, cumque præterea rectus fit angulus bca:, eo, quod triangulum bca:, defcriptum fuit in dimidio z:, & a vertice c: cadat ad diametrum, vel bafim ba: perpendicularis cd:, erit ut ba: ad ac:, ita ac: ad ad: fed ad: æqualis eft af:, eo, quod, fi recta df:, quæ circuli eft corda minoris, ad angulos rectos fecuit rectam ca:, ipfius diametrum, fecabit verfa vice recta ca: ad angulos rectos cordam df:, atque adeò dimidiabit illam : quare cum æquales fint inter fe ipfius partes de:, ef:, & invicem fint æquales anguli recti dea:, fea:, & commune latus ea:, erunt duo triangula dea: fea:, eo, quod angulum habeant uni angulo æqualem, ab æqualibus contentum lateribus, inter fe fimiliter æqualia : unde recta da: æqualis erit rectæ af:, ergo uti eft recta ab: ad ac:, ita erit ac: ad af:, ideft ad: fed quia cum fit rectangulum etiam triangulum afc:, eo, quod defcriptum fuit in dimidio minori circulo, & ab angulo recto f: ad diametrum, ipfius bafim, cadat perpendicularis

ca: sia il diametro di un altro cerchio or da descriversi, e sia da una retta fd:, condotta dalla di lui periferia al fisso punto d:, segata ad angoli retti: cadendo finalmente dal punto f:, estremità della fd:, a i termini della ca: diametro, le rette fc: fa:

Dico adesso, se si supponga, che quel cubico altare in Delo fosse eretto sopra un lato ag:, raggio comune ai circoli x: z:, e ne avessero i Delj drizzato un altro simile, di cui un lato fosse la retta af:, che l' altare eretto sopra la retta af: sarebbe stato quello, che ricercava da loro quel sottilissimo oracolo, cioè il cubo di af: duplo sarebbe stato del cubo di ag:

Imperocchè essendo primieramente retti li angoli adc:, cfa:, quello, perchè la cd: fu perpendicolare al diametro ab:, l' altro, per essere posto nel semicerchio; passerà dunque il circolo minore per i quattro punti a: d: c: f:, ed essendo inoltre retto l' angolo bca:, perchè il triangolo bca: si descrisse nella metà di z:, e cadendo dal vertice c: al diametro, o base ba: la perpendicolare cd: sarà come ba: ad ac:, così ac: ad ad: ma ad: uguaglia af: perchè se la df:, che è corda del circolo minore segò ad angoli retti la ca: diametro del medesimo, segherà viceversa la ca: ad angoli retti la corda df:, e perciò la segherà per mezzo; onde essendo eguali le parti fatte di essa de: ef:, ed essendo uguali fra loro li angoli retti dea: fea:, è comune il lato ea:, saranno i due triangoli dea: fea:, perchè hanno un angolo eguale ad un angolo, contenuto da lati eguali, similmente uguali fra loro, onde la da: sarà eguale alla af:, dunque come è ab: ad ac:, così sarà ac: ad af:, cioè ad: Ma perchè essendo rettangolo anche il triangolo afc:, mentre fu descritto nella metà del circolo minore, e cadendo dall' angolo retto f: al diametro, base di esso, la perpendicolare fe:, come

 sta

cularis fe:, uti eſt ca: ad af:, ita eſt af: ad ae: ; ergo totam ordinando proportionem, uti eſt ab: ad ac:, ita erit ac: ad af:, & uti ac: ad af: ita erit af: ad ae: ſed ae: æqualis eſt radio ag:, quia corda df: ducta ex puncto d:, eo conſilio, ut ad angulos rectos ſecet rectam ac:, niſi ab eadem ſecaret partem ae:, æqualem radio ag:, opus eſſet, ut ex eodem puncto d: ducta, ad angulos rectos ſecare poſſet ipſam ac: in diverſo puncto à puncto contactus e: quò altera recta tangentem inter, & periphæriam non cadit (ſed hoc a veritate abhorret) ergo totam invertendo rationem, uti eſt ae: ſcilicet ag: ad af:, ita erit af: ad ac: & uti af: ad ac:, ita erit ac: ad ab: ſed ab: quarta, eo, quod diametros circuli z: ſit, eſt in continuâ proportione dupla primæ ag:, radii ipſiuſmet circuli.

Ergo ſi ſupra ſecundam proportionalem, quam dixi af: erectum fuiſſet a Deliis alterum altare cubicum, iſtud duplum fuiſſet illius, quod poſitum ſupra primam ag: finximus: propterea quia fuiſſet, ut quarta proportionalis, ſive diametros ba: ad eandem primam, vel radium ag: ipſius circuli, juxta rationem triplicatam laterum uti vulgatiſſimum eſt. Sic etiam igitur non difficili, malâque minervâ arguti problema a Deliis enodatum foret oraculi: licet ego quidem ignorem, ſi ſuarum, id, quod ipſi anhelabant, calamitatum, re haud infectâ, deindè finem vidiſſent. Quod erat ultimum demonſtrandum &c.

F I N I S.

sta ca: ad af: , così sta af: ad ae: , dunque , ordinando tutta la proporzione , come è ab: ad ac: , così sarà ac: ad af: , e come ac: ad af: , così sarà af: ad ae: Ma ae: uguaglia il raggio ag: , perchè la corda df: tirata dal punto d: a segare ad angoli retti la ac: , se non segasse da essa la parte ae: , eguale al raggio ag: , bisognerebbe , che potesse condotta dall' istesso punto d: segare la istessa ac: ad angoli retti in un altro punto fuori di quello del contatto e: dove altra retta fra la tangente , e la periferia non cade (e ciò è falso) dunque invertendo tutta la proporzione , come sta la ae: , cioè la ag: ad af: , così starà af: ad ac: , e come af: ad ac: , così starà ac: ad ab; Ma ab: quarta per essere il diametro di z: è nella proporzione continua , doppia della prima ag: , raggio del medesimo circolo ,

Dunque se sopra la seconda proporzionale af: come dissi , fosse stato da i Delj drizzato un altro cubico altare , questo sarebbe stato il doppio di quello supposto eretto sopra la prima ag: , perchè sarebbe stato come la quarta , o diametro ba: ad essa prima , o raggio ag: dello stesso circolo ; come attesa la triplicata ragione dei lati , è manifesto . Questo dunque era un mezzo per cui potevasi dai Delj sviluppare il nodo , ma non sò , se poi delle calamità loro ottenere il desiderato , e per premio di ciò , promesso fine . Il che era finalmente ec.

IL FINE.

ADDENDA.

Pag. 41. lin. 30. recta linea re: (adde) (si alias semper proximiores rectas eligas, & latera eorum segmentorum cum ipsorum ordinatis altitudinibus reciprocè compares, idem deprehendes)

Pag. 70. lin. 25. possunt (adde) sic etiam locutus.

	ERRATA	CORRIGE
Pag. 4. lin. 10.	singula	singulæ
4. lin. 21.	quantitatu	quantitate
8. lin. 3.	i l: o p:	i: l: o: p:
16. lin. 21.	eumque	cumque
26. lin. 8.	expeditionem	expeditiorem
46. lin. 35.	curvâ b a:	curva 6 a:
56. lin. 30.	eorundem	earundem

AGGIUNGASI

Pag. 45. lin. 29. retta linea r e: (aggiunta) (se si prendano altre rette sempre più prossime, e si paragoni reciprocamente la ragione de i lati di quei segmenti con quella delle loro ordinate altezze se ne dedurrà lo stesso)

Pag. 71. lin. 23. intendendo (aggiunta) così ancora le quantità ec.

	Errori	Correzioni
Pag. 5. lin. 8.	amendue	ambedue
69. lin. 4.	confideri	consideri
73. lin. 26.	conosciuta	sconosciuta

Fig. 4.

Fig. 7.

Fig. 9
b
a
c
Fig. 11.
b
d

d
p
K
b
c
d
e
3
a
D
z
d
e
q
e
d
l
t
c

Fig. 15.
b
c
a
z
y

Fig. 19.
b
f
h
c
c
Fig. 21.
n
k
e
i
g
a
d
m
x
c
Fig. 22.
f
e
a
d

Fig. 25.
c
d
Fig. 28.
B
b
c
d
a
b
g
f

Fig. 30.
c
f
e
g
a
z
x